Analytische Zahlentheorie

Sommersemester 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Erzeugende Funktionen

1.1 Einleitende Beispiele

1.1.1 Beispiel (Fibonacci-Folge)

Die Fibonacci-Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist rekursiv definiert durch $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ sowie $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Sei ferner $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^n$.
Dann gilt $r \geq \frac{1}{2}$, denn:

Mittels vollständiger Induktion kann gezeigt werden, dass die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton steigend ist. Damit gilt $\left|\frac{F_n}{F_{n-1}}\right| \leq \left|\frac{2F_{n-1}}{F_{n-1}}\right| = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $z \in B^{\mathbb{C}}_{0,5}(0)$ konvergiert somit die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ absolut nach dem Quotientenkriterium. Also gilt

$$r := \sup\left\{\epsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \forall_{z\in B^{\mathbb{C}}_{\epsilon}(0)}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n \text{ ist konvergent }\Big)\right\} \geq \frac{1}{2}.$$

Damit ist

$$f : B^{\mathbb{C}}_r(0) \longrightarrow \mathbb{C},\; z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$$

eine wohldefinierte, holomorphe Funktion. Ferner folgt für alle $z \in B^{\mathbb{C}}_r(0)$ mit den Rechenregeln für Potenzreihen, dass $zf(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_{n-1} z^n$, $z^2 f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^{n+2} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} F_{n-2} z^n$ und somit

$$\begin{aligned}(1 - z - z^2)f(z) = f(z) - zf(z) - z^2 f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} z^n - \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} z^n \\ &= F_0 + F_1 z - F_0 z + \sum_{n=2}^{\infty}\big(\underbrace{F_n - F_{n-1} - F_{n-2}}_{=\,0}\big)z^n = z.\end{aligned}$$

gilt. Also gilt $f(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$ für alle $z \in B^{\mathbb{C}}_r(0)$.
Es soll nun eine weitere Formel zur direkten Berechnung der n-ten Fibonacci-Zahl, welche nach Moivre und Binet benannt worden ist, hergeleitet werden:

Für alle $z \in B^{\mathbb{C}}_1(0)$ gilt

$$1 - z - z^2 = -(z-a)(z-b)$$

mit $a := \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und mit $b := \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Damit hat f eine Partialbruchzerlegung der Form

$$f(z) = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b}$$

für alle $z \in B^{\mathbb{C}}_1(0)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Damit folgt, dass für alle $z \in B^{\mathbb{C}}_{\min\{\,|a|\,,\,|b|\,\}}(0)$

$$\begin{aligned}f(z) &= -\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{a}} - \frac{\beta}{b}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{b}} = -\frac{\alpha}{a}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{a}\Big)^n - \frac{\beta}{b}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{b}\Big)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(-\frac{\alpha}{a^{n+1}} - \frac{\beta}{b^{n+1}}\Big)z^n.\end{aligned}$$

Damit folgt nach dem Identitätssatz für Potenzreihen, dass

$$F_n = -\frac{\alpha}{a^{n+1}} - \frac{\beta}{b^{n+1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Ferner gilt für α und β:

1. Es gilt

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\Big((z-a)\frac{z}{-(z-a)(z-b)}\Big) = \lim_{z\to a}\frac{z}{-(z-b)} = \frac{a}{-(a-b)}\\ &= -\frac{a}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

   und somit folgt $\frac{\alpha}{a} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2. Es gilt

$$\begin{aligned}\beta &= \lim_{z\to b}(z-b)f(z) = \lim_{z\to b}\Big((z-b)\frac{z}{-(z-a)(z-b)}\Big) = \lim_{z\to a}\frac{z}{-(z-a)} = \frac{b}{-(b-a)}\\ &= -\frac{b}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

   und somit folgt $\frac{\beta}{b} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Außerdem gilt $\frac{1}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{1}{b} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Somit folgt insgesamt die Formel von Moivre und Binet: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$F_n = -\frac{\alpha}{a^{n+1}} - \frac{\beta}{b^{n+1}} = -\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{1}{a^n} - \frac{\beta}{b}\cdot\frac{1}{b^n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big). \tag{1}$$

Bemerkungen:

1. Interessant ist bei dieser Formel für die Fibonacci-Zahlen, dass zur Berechnung der ganzen Zahl F_n mit $n \in \mathbb{N}$ die irrationale Zahl $\sqrt{5}$ benötigt wird.

2. Eine alternative Methode zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen ist durch

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{=:A}\begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2}\end{pmatrix}$$

   mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Also gilt

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1}\end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0\end{pmatrix}$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei ist die Matrix A diagonalisierbar. Das heißt, es existieren $a, b \in \mathbb{R}$ und $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, so dass $A = T^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}T$ gilt. Damit folgt

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1}\end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 \\ 0 & b^{n-1}\end{pmatrix}T\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0\end{pmatrix}$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ist eine rekursive Formel für eine Zahlenfolge bekannt, so kann diese leicht mittels vollständiger Induktion bewiesen werden. Jedoch kann eine solche Formel schwerlich ohne analytische Hilfsmittel über die Funktion, die über von der Folge erzeugte Potenzreihe definiert ist, gefunden werden.

1.1.2 Definition

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ eine Folge. Dann heißt die Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

die erzeugende Funktion von der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Die Strategie ist, aus den analytischen Eigenschaften einer erzeugenden Funktion f von einer Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ Informationen über die Folge zu gewinnen. Im Allgemeinen ist es nicht möglich, eine explizite Formel zur Berechnung von a_n für ein $n \in \mathbb{N}_0$ wie im Fall der Fibonacci-Folge (vgl. 1.1.1) zu erhalten. Jedoch können häufig Informationen über das asymptotische Verhalten der Folgeglieder gewonnen werden. Im Fall der Fibonacci-Folge gilt zum Beispiel: für den Konvergenzradius r der Potenzreihe der erzeugenden Funktion f von $\big(F_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$:

Sei $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^n$. Nach der Formel von Cauchy und Hadamard gilt dann

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|F_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{F_n}.$$

Ferner ist $g : \mathbb{C}\backslash\{a,b\} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b}$ mit a und b definiert wie in 1.1.1 holomorph und ist somit auf $B_s^{\mathbb{C}}(0)$ mit $s := \min\{|a|,|b|\} = |a| > \frac{1}{2}$ als Potenzreihe darstellbar. Außerdem gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^n = g(z)$ für alle $z \in B_{\frac{1}{2}}^{\mathbb{C}}(0)$ nach obigen Rechnungen. Damit sind die Koeffizienten der Potenzreihe, die g auf $B_s^{\mathbb{C}}(0)$ darstellt, nach dem Identitätssatz für Potenzreihen die Fibonacci-Zahlen. Also folgt $r = |a| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ nach der Definition des Konvergenzradius einer Potenzreihe.[1]
Somit existiert für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$F_n \leq \Big(\frac{1}{r} + \epsilon\Big)^n = \Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \epsilon\Big)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt.

Es sollen nun noch weitere Beispiele für erzeugende Funktionen betrachtet werden:

1.1.3 Beispiel

Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei $f(z) := (\sum\limits_{n=1}^{6} z^n)^m = \sum\limits_{n=m}^{6m} p_{n,m} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\{p_{n,m} \mid m \leq n \leq 6m\}$ geeignet. Dann gilt

$$f(z) = \prod_{k=1}^{m} \Big(\sum_{n_k=1}^{6} z^{n_k}\Big) = \sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{6} z^{n_1+\dots+n_m}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Also folgt

$$p_{n,m} = \Big|\Big\{(n_1,\dots,n_m) \in \underline{6}^m \;\Big|\; \sum_{k=1}^{m} n_k = n\Big\}\Big|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n \leq 6m$. Das heißt, für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n \leq 6m$ ist $p_{n,m}$ genau die Anzahl der Möglichkeiten, bei m-maligen Würfeln als Summe der Augenzahlen die Zahl n zu erreichen.
Es soll nun außerdem eine etwas kuriose Anwendung dieser Idee betrachtet werden:

Es gilt

$$\sum_{n=1}^{6} z^n = z(z+1)(z^2+z+1)(z^2-z+1)$$

und damit

$$\big(\sum_{n=1}^{6} z^n\big)^2 = \big(z(z+1)(z^2+z+1)\big) \cdot \big(z(z+1)(z^2+z+1)(z^2-z+1)^2\big)$$

[1] Konvergenzradius ist der maximale Radius um den Entwicklungspunkt der Potenzreihe, so dass die Reihe für alle Werte aus dem Konvergenzkreis konvergiert.

für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Interpretation der letzten Gleichung ist dabei die Folgende: Zwei sechsseitige Würfel seien einmal mit den Zahlen 1, zweimal 2, zweimal 3 und 4 beschriftet und einmal mit den Zahlen $1, 3, 4, 5, 6$ und 8 beschriftet. Dann ist die Anzahl der Möglichkeiten und damit die Wahrscheinlichkeit, mit diesen beiden Würfeln die Augensumme n mit $n \in \mathbb{N}$ zu erzielen, genauso groß wie bei einem Paar gewöhnlicher sechsseitiger Würfel, und zwar für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkungen:

1. Allgemein gilt für zwei Würfel mit den Augenzahlen $a_1, \ldots, a_6 \in \mathbb{N}$ bzw. $b_1, \ldots, b_6 \in \mathbb{N}$, dass die erzeugende Funktion der Folge $\big(q_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei für alle $n \in \mathbb{N}$ q_n die Anzahl der Möglichkeiten, mit diesen beiden Würfeln die Augensumme n zu erzielen, sei,
$$f : B_r^{\mathbb{C}}(0) \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \Big(\sum_{k=1}^{6} z^{a_k}\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{6} z^{b_k}\Big)$$
mit $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ geeignet ist.

1.1.4 Beispiel

Sei $c_n := \big|\{(k, l, m) \in (\mathbb{N}_0)^3 \mid k + 2l + 3m = n\}\big|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $c_0 := 1$.[2] Sei ferner f die erzeugende Funktion von $\big(c_n\big)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und sei r der Konvergenzradius der Potenzreihe von f um 0.[3] Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{r, 1\}$:
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{k,l,m \in \mathbb{N}_0 \\ k+l+m=n}}^{\infty} z^{k+2l+3m} \Big) = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} z^{k+2l+3m}$$
$$= \Big(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} z^{2l}\Big) \cdot \Big(\sum_{m=0}^{\infty} z^{3m}\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (z^2)^l\Big) \cdot \Big(\sum_{m=0}^{\infty} (z^3)^m\Big)$$
$$= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{1-z^3} = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)} = \frac{1}{(1-z)^3(1+z)(1+z+z^2)}.$$
Somit folgt $r = 1$. Durch Partialbruchzerlegung und geeigneter Zusammenfassung der Terme mit einfachen Polen folgt
$$f(z) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(1-z)^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-z^2)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-z^3)}$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{r, 1\}$. Wegen
$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{1-z}\Big) = \frac{d}{dz}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$
und
$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{(1-z)^2}\Big) = \frac{d}{dz}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ folgt somit
$$c_n = \frac{(n+1)(n+2)}{12} + \frac{n+1}{4} + \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{falls } 2|n \text{ und } 3 \nmid n \\ \frac{1}{3}, & \text{falls } 2 \nmid n \text{ und } 3|n \\ \frac{7}{12}, & \text{falls } 2|n \text{ und } 3|n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
bzw.
$$\left\lceil \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + \frac{5}{12} \right\rceil = c_n = \left\lfloor \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + 1 \right\rfloor$$
wegen $\frac{(n+1)(n+2)}{12} + \frac{n+1}{4} = \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + \frac{5}{12}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $\lceil x \rceil := \min\{y \in \mathbb{Z} \,|\, y \geq x\}$ und $\lfloor x \rfloor := \max\{y \in \mathbb{Z} \,|\, y \leq x\}$ die obere bzw. untere Gaußklammer für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnen.

[2] Für $n \in \mathbb{N}$ ist c_n die Anzahl der Möglichkeiten, den Geldbetrag der Höhe n in Münzen mit den Werten $1, 2$ und 3 zu zerteilen.

[3] Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent ist, gilt $r \leq 1$.

Bemerkungen:

1. Werden allgemein $n \in \mathbb{N}$ Münzen mit den Werten $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{N}$ betrachtet, so wird anstelle von
$$f : B_1^{\mathbb{C}}(0) \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$$
die Funktion
$$g : B_1^{\mathbb{C}}(0) \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-z^{w_k}}.$$
Dann ist g holomorph und somit existiert $\big(c_m\big)_{m\in\mathbb{N}_0}$, so dass g die erzeugende Funktion dieser Folge ist.
Sei $w_1 = 1$. Es ist dann im Allgemeinen hoffnungslos bzw. kompliziert, eine explizite Formel für die Folge $\big(c_m\big)_{m\in\mathbb{N}_0}$ durch Partialbruchzerlegung zu erlangen. Jedoch existiert eine Partialbruchzerlegung. Seien $z_1, \ldots, z_t$ mit $t \in \mathbb{N}$ die Nullstellen des Nenners, die möglicherweise komplex sind, so erhält man eine Darstellung der folgenden Form:

   Für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{w \in \mathbb{C} \mid \exists_{k\in \underline{n}}(w^{w^k} = 1)\}$ gilt
$$g(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_{1k}}{(1-z)^k} + \sum_{k=2}^{t}\Big(\sum_{l=1}^{m_k} \frac{\beta_{kl}}{(1-\frac{z}{z_k})^l}\Big), \tag{2}$$
   wobei m_k die Vielfachheit der Nullstelle z_k im Nenner der Partialbruchzerlegung für alle $k \in \underline{n}$ ($m_1 = n$ also) sei, und wobei $\beta_{lk} \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \underline{t}$ und für alle $l \in \underline{m_k}$ sei. Dabei gilt $m_k < n$ für alle $2 \leq k \leq t$.

   Es gilt nun für alle $z \in B_1^{\mathbb{C}}(0)$ und für alle $k \in \mathbb{N}$
$$\frac{1}{(1-z)^k} = \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\Big(\frac{1}{1-z}\Big) = \frac{1}{(k-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\prod_{l=1}^{k-1}(m+l)\cdot z^m\Big). \tag{3}$$
   Die Strategie zur Berechnung der Folge $\big(c_m\big)_{m\in\mathbb{N}_0}$ ist nun Folgende:

   Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ kann c_m wegen der Gleichungen (2) und (3) in der Form
$$c_m = \frac{\beta_{1n}}{(n-1)!}\cdot\prod_{l=1}^{m-1}(m+l) + d_m,$$
   wobei d_m eine Summe von Thermen der Form $\frac{\beta_{kl}}{(l-1)!\cdot z_k^m}\cdot\prod_{j=1}^{l-1}(m+j)$ mit $k \in \underline{t}$, $l \in \underline{m_k}$ und mit $(k,l) \neq (1,n)$ ist.

   Wegen $z_1, \ldots, z_t \in \partial B_1^{\mathbb{C}}(0)$ existiert eine Konstante $A \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $|d_m| \leq Am^{n-2}$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt. Also folgt, dass eine Konstante $B \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine Folge $\big(e_m\big)_{m\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ existiert, so dass $c_m = \frac{\beta_{1n}}{(n-1)!}m^{n-1} + e_m$ mit $|e_m| \leq Bm^{n-2}$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt. Mit den Landausymbolen kann dies auch in der Form
$$c_m = \frac{\beta_{1n}}{(n-1)!}m^{n-1} + O(m^{n-2})$$
   für $m \longrightarrow \infty$ geschrieben werden.
   Ferner gilt
$$\beta_{1n} = \lim_{z\to 1}(1-z)^n g(z) = \lim_{z\to 1}\Big(\prod_{k=1}^{n}\frac{1-z}{1-z^{w^k}}\Big)$$
   sowie $\lim\limits_{z\to 1}\frac{1-z}{1-z^{w^k}} = \frac{1}{w^k}$ für alle $k \in \underline{n}$ nach L'Hospital. Also gilt $\beta_{1n} = \prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{w^k}$ und somit folgt
$$c_m = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{w^k}\cdot m^{n-1} + O(m^{n-2})$$

für $m \longrightarrow \infty$. Insbesondere folgt damit

$$c_m \sim \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{w^k} \cdot m^{n-1}$$

für $m \longrightarrow \infty$.

1.1.5 Beispiel

In diesem Beispiel soll folgende Frage beantwortet werden:

Frage: Existiert eine Zerlegung von $\mathbb{N}_0$ in disjunkte Teilmengen A und B, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Big|\big\{(a,a') \in A^2 \,\big|\, a+a'=n,\ a \neq a'\big\}\Big| = \Big|\big\{(b,b') \in B^2 \,\big|\, b+b'=n,\ b \neq b'\big\}\Big|$$

gilt.

Zur Klärung dieser Frage sei zunächst einmal angenommen, dass $A, B \subseteq \mathbb{N}_0$ mit obigen Eigenschaften existieren. Dann gilt:

O.B.d.A. gelte $0 \in A$. Dann gilt $1 \in B$, da ansonsten in A einer Zerlegung der 1 enthalten ist, aber in B keine Zerlegung der 1 wegen $A \cap B = \emptyset$ existiert. Ebenso folgt $2 \in B$, $3 \in A$, $4 \in B$, $5, 6 \in A$ usw. Jedoch ist unklar, wie diese Aufteilung weitergeht. Zur genaueren Untersuchung seien dazu

$$f : B_1^{\mathbb{C}}(0) \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum_{n \in A} z^n$$

und

$$g : B_1^{\mathbb{C}}(0) \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum_{n \in B} z^n.$$

Dann sind f und g wohldefinierte, holomorphe Funktionen, da die geometrische Reihe für beide Reihen stets eine lokale Majorante ist. Ferner gilt

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

für alle $z \in B_1^{\mathbb{C}}(0)$. Mit

$$c_n := \big|\{(a,a') \in A^2 \,|\, a+a'=n,\ a \neq a'\}\big|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und mit $A =: \{a_k \,|\, k \in \mathbb{N}_0\}$ mit $a_k < a_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ folgt dann für alle $z \in B_1^{\mathbb{C}}(0)$:

Es gilt

$$f(z)^2 = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} x^{a_k}\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} x^{a_k + a_{n-k}}\Big) = \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} x^{a_k + a_l} = \sum_{(a,a') \in A^2} x^{a+a'}$$

und somit $f(z)^2 - f(z^2) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Analog folgt $g(z)^2 - g(z^2) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Dies liefert

$$\begin{aligned} f(z^2) - g(z^2) &= f(z)^2 - g(z)^2 = \big(f(z) - g(z)\big)\big(f(z) + g(z)\big) \\ &= \big(f(z) - g(z)\big) \cdot \frac{1}{1-z}, \end{aligned}$$

das heißt, es gilt $\big(f(z) - g(z)\big) = (1-z) \cdot \big(f(z^2) - g(z^2)\big)$. Induktiv folgt damit, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\big(f(z) - g(z)\big) = \Big(\prod_{k=0}^{n} (1 - z^{2^k})\Big) \cdot \big(f(z^{2^{n+1}}) - g(z^{2^{n+1}}\big)$$

gilt. Wegen $|z| < 1$ und wegen der Stetigkeit von f und g gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(z^{2^{n+1}}) = f(0) = 1$, da $0 \in A$ gilt, sowie $\lim\limits_{n\to\infty} g(z^{2^{n+1}}) = g(0) = 0$, da $0 \notin B$, $1 \in B$ gilt. Somit folgt

$$\big(f(z) - g(z)\big) = \lim_{n\to\infty} \Big(\prod_{k=0}^{n} (1 - z^{2^k}) \Big).$$

Ferner besitzt jedes $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Darstellung (dyadische Darstellung genannt) der Form $n = \sum\limits_{k=1}^{m_n} 2^{p_{n,k}}$ mit $p_{n,1}, \ldots, p_{n,m_n} \in \mathbb{N}_0$ paarweise verschieden und mit $m_n \in \mathbb{N}$, wobei der Beweis von dieser Aussage hier nicht vollführt werden soll. Im Folgenden seien für $n \in \mathbb{N}$ die Zahlen $p_{n,1}, \ldots, p_{n,m_n}, m_n$ vermöge der eben genannten Eigenschaften definiert.[4] Ausmultiplizieren liefert nun, dass

$$\prod_{k=0}^{n} (1 - z^{2^k}) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} (-1)^{m_k} z^k = \sum_{k\,\in\, A_n} z^k - \sum_{k\,\in\, B_n} z^k$$

mit $m_0 := 0$, mit $A_n := \{k \in \underline{2^{n+1}-1}_{\,0} \,|\, m_k \equiv_2 0\}$ und mit $B_n := \{k \in \underline{2^{n+1}-1}_{\,0} \,|\, m_k \equiv_2 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei $A_\infty := \{k \in \mathbb{N}_0 \,|\, m_k \equiv_2 0\}$ und sei $B_\infty := \{k \in \mathbb{N}_0 \,|\, m_k \equiv_2 1\}$. Insgesamt folgt dann damit

$$\sum_{n\,\in\, A} z^n - \sum_{n\,\in\, B} z^n = f(z) - g(z) = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k\,\in\, A_n} z^k - \sum_{k\,\in\, B_n} z^k \Big) = \sum_{n\,\in\, A_\infty} z^n - \sum_{n\,\in\, B_\infty} z^n.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt nun $A = A_\infty$ und $B = B_\infty$ bzw. $A = B_\infty$ und $B = A_\infty$.

Damit sind A_∞ und B_∞ zwei wie in obiger Fragestellung gesuchte Mengen. Ferner zeigen die vorangegangenen Rechungen, dass dies bis auf Vertauschung die einzigen Mengen mit diesen Eigenschaften sind.

1.2 Exkurs über unendliche Produkte

Motivation

In 1.1.5 wurde für eine Zahlenfolge $\big(p_n\big)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_k$$

betrachtet. Es wäre somit naheliegend, in Analogie mit unendlichen Reihen unendliche Produkte durch

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_k$$

zu definieren, falls dieser Grenzwert existiert. Gilt zum Beispiel aber $p_n := \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_k = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0.$$

Das Produkt wäre 0, wobei jedoch keiner der Faktoren 0 ist. Daher wird wie folgt vorgegangen:

Sei im Folgenden stets $\big(p_n\big)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ eine Zahlenfolge.

[4]Die Zahl m_n für $n \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl der Einsen in der Binärdarstellung von n.

1.2.1 Definition

Das (unendliche) Produkt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ heißt konvergent, falls ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq N}} \prod_{k=N}^{n} p_k$$

existiert und ungleich 0 ist. Im Fall der Konvergenz sei

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k := \Big(\prod_{k=1}^{N-1} p_k\Big) \cdot \Big(\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq N}} \prod_{k=N}^{n} p_k\Big).$$

Bemerkungen:

1. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq N$ gilt $p_k \neq 0$.
2. Es gilt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 0$ genau dann, wenn ein $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ konvergent ist und ein $k \in \mathbb{N}$ mit $p_k = 0$ existiert.

In Analogie zu konvergenten Reihen gilt:

1.2.2 Lemma

Ist $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ konvergent, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} p_k = 1$.

Beweis: Analog zum entsprechenden Beweis für konvergente Reihen. ■

Bemerkungen:

1. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, denn für die Folgen $\big(a_k\big)_{k\in\mathbb{N}} := \big(\frac{k-1}{k}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ und $\big(b_k\big)_{k\in\mathbb{N}} := \big(\frac{k+1}{k}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_k = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} b_k$. Aber mit 1.2.4 und mit 1.2.5 folgt, dass die unendlichen Produkte dieser Folgen nicht existieren.
2. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} p_k = 1$ im Konvergenzfall des unendlichen Produktes wird für alle $k \in \mathbb{N}$ das Folgeglied p_k oft in der Form $p_k =: 1 + q_k$ geschrieben und das Produkt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1+q_k)$ statt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ betrachtet.

1.2.3 Definition

Ein unendliches Produkt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1+p_k)$ heißt absolut konvergent, falls $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1+|p_k|)$ konvergiert.

1.2.4 Satz

Sei $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1+p_k)$ absolut konvergent. Dann ist $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1+p_k)$ konvergent.

Beweisskizze: Da $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1+|p_k|)$ konvergent ist, existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=N}^{n}(1+|p_k|)$ existiert und ungleich 0 ist. Damit gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $N < m < n$

$$\Big|\prod_{k=N}^{n} (1+p_k) - \prod_{k=N}^{m} (1+p_k)\Big| = \Big|\sum_{k_1,\ldots,k_l\in X} \Big(\prod_{i=1}^{l} p_{k_i}\Big)\Big| = \sum_{k_1,\ldots,k_l\in X} \Big(\prod_{i=1}^{l} |p_{k_i}|\Big)$$
$$= \prod_{k=N}^{n} (1+|p_k|) - \prod_{k=N}^{m} (1+|p_k|)$$

für eine gewisse Menge X von Multiindizes. Die Behauptung folgt nun aus dem Cauchykriterium. ■

1.2.5 Satz

Das unendliches Produkt $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+p_k)$ konvergiert genau dann absolut, wenn die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ absolut konvergiert.

Beweis: O.B.d.A. gelte $p_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ferner gelte o.B.d.A. $\lim\limits_{n\to\infty} p_k = 0$, denn:

1. Ist $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+p_k)$ absolut konvergent, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(1+p_k) = 1$ nach 1.2.2 und somit $\lim\limits_{n\to\infty} p_k = 0$ nach den Limesrechenregeln.
2. Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ absolut konvergent, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} p_k = 0$.

Also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq p_k \leq \frac{1}{2}$ für alle $k \geq N$. Setze $c := \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)$. Dann gilt

$$cx \leq \ln(1+x) \leq x$$

für alle $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Damit folgt für alle $n \geq N$:

$$c\sum_{k=N}^{n} p_k \leq \sum_{k=N}^{n} \ln(1+p_k) = \ln\Big(\prod_{k=N}^{n}(1+p_k)\Big) \leq \sum_{k=N}^{n} p_k.$$

Damit folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium. ∎

1.2.6 Satz

Absolut konvergente unendliche Produkte konvergieren auch bei Umordnung der Faktoren, und zwar gegen denselben Grenzwert.

Beweis: Analog zum entsprechenden Beweis für Reihen. ∎

2 Partitionen

2.1 Grundlagen über Partitionen

Für alle $n, N \in \mathbb{N}$ sei c_n^N die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahl n als Summe mit Summanden aus $\underline{N}$ zu schreiben. Das heißt, es gilt

$$c_n^N = \left|\left\{(x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{N}_0)^N \mid \sum_{k=1}^{N} kx_k = n\right\}\right|$$

für alle $n, N \in \mathbb{N}$. Ferner sei $c_0^N := 1$ für alle $N \in \mathbb{N}$. In 1.1.4 wurde gezeigt, dass

$$P_3 : B_1^{\mathbb{C}}(0) \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$$

die erzeugende Funktion der Folge $(c_n^3)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Mit analoger Beweisführung folgt, dass für alle $N \in \mathbb{N}$

$$P_N : B_1^{\mathbb{C}}(0) \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k}.$$

die erzeugende Funktion der Folge $(c_n^N)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Werden nun beliebige Summanden aus $\mathbb{N}$ zugelassen, so folgt:

2.1.1 Satz / Definition

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei ferner $c_n^{\mathbb{N}}$ die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahl n als Summe mit Summanden aus $\mathbb{N}$ zu schreiben und sei $c_0^{\mathbb{N}} := 1$. Dann ist

$$P : B_1^{\mathbb{C}}(0) \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k}$$

die erzeugende Funktion der Folge $(c_n^{\mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}_0}$ und P ist eine nullstellenfreie, holomorphe Funktion.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : B_1^{\mathbb{C}}(0) \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto -z^n$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ absolut lokal gleichmäßig und somit konvergiert $\prod_{k=1}^{\infty} 1 + f_k$ absolut lokal gleichmäßig.[5] Damit folgt:

1. Wegen $\frac{1}{1-z^k} \neq 0$ für alle $z \in B_1^{\mathbb{C}}(0)$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ konvergiert $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k}$ für alle $z \in B_1^{\mathbb{C}}(0)$. Somit ist P eine wohldefinierte Abbildung mit $0 \notin \mathrm{Im}(F)$.
2. Da $\prod_{n=1}^{\infty} 1 + f_n$ absolut lokal gleichmäßig konvergiert, konvergiert das Produkt gegen eine holomorphe Grenzfunktion, und zwar gegen $\frac{1}{P}$. Somit ist P holomorph.

Damit ist P um 0 in eine Potenzreihe entwickelbar, wobei der Konvergenzradius dieser Potenzreihe 1 ist, da wegen $c_n^{\mathbb{N}} \geq 1$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\mathbb{N}}$ divergent ist. Sei also $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

für alle $z \in B_1^{\mathbb{C}}(0)$. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ die holomorphe Funktion P_n definiert wie oben. Da $\prod_{n=0}^{\infty} 1 + f_n$ absolut lokal gleichmäßig konvergiert, und da $\frac{1}{1-z^n} \neq 0$ für alle $z \in B_1^{\mathbb{C}}(0)$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, konvergiert die Folge $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen auch P. Daher folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit dem Satz von Weierstraß, dass

$$a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!} = \lim_{N \to \infty} \frac{P_N^{(n)}(0)}{n!} = \lim_{N \to \infty} c_n^N = \lim_{N \to \infty} c_n^{\mathbb{N}} = c_n^{\mathbb{N}}$$

gilt, da für alle $N \in \mathbb{N}_0$ die Folge $(c_n^N)_{n \in \mathbb{N}_{\geq N}}$ konstant ist. Somit ist die Behauptung gezeigt. ∎

[5] Vergleiche Fischer, Funktionentheorie, S.195.

2.1.2 Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann heißen $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine Partition von n, falls $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ sowie $n_k \leq n_{k-1} \leq \ldots n_1$ gilt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $p(n)$ die Anzahl der Partitionen der Zahl n. Ferner heißt

$$p : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0, n \longmapsto p(n)$$

mit $p(0) := 1$ Partitionsfunktion.

Bemerkungen:

1. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt $p(n)$ die Anzahl der Partitionen ohne Berücksichtigung der Ordnung an, denn zum Beispiel ist durch die Gleichung $5 = 3+1+1 = 1+3+1 = 1+1+3$ nur eine Partition der 5 gegeben.

2. In 2.2.14 wird gezeigt, dass $p(n) \sim \frac{\exp\left(\pi \cdot \sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n}$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt.[6]

Die obige Vorüberlegung liefert nun das folgende Lemma:

2.1.3 Lemma

P ist die erzeugende Funktion der Folge $\big(p(n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$. Das heißt, es gilt $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n$ für alle $z \in B_1^{\mathbb{C}}(0)$.

Beweis: Wegen

$$c_n^{\mathbb{N}} = c_n^n = \left|\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{N}_0)^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} k x_k = n\right\}\right|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt die Behauptung sofort. ■

2.1.4 Definition

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $p_u(n)$ die Anzahl der Partitionen von n in ungerade Summanden und $p_v(n)$ bezeichne die Anzahl der Partitionen von n in paarweise verschiedene Summanden. Ferner seien $p_u(0) := 1 =: p_v(0)$.

Beispiele:

1. Es gilt z.B. $p_u(4) = 2$, denn die einzigen Partitionen von 4 in ungerade Summanden sind $1+3$ und $1+1+1+1$.

2.1.5 Lemma

Sei $M \subseteq \mathbb{N}_0$ und seien a_n die Anzahl der Partitionen von n mit Summanden aus M und b_n die Anzahl der Partitionen von n mit paarweise verschiedenen Summanden aus M für alle $n \in \mathbb{N}$. Seinen ferner $a_0 := 1 =: b_0$. Dann gilt:

a. Die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist $F_1 : B_1^{\mathbb{C}}(0) \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \prod_{m \in M} \frac{1}{1-z^m}$.

b. Die erzeugende Funktion der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist $F_2 : B_1^{\mathbb{C}}(0) \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \prod_{m \in M} (1+z^m)$.

Beweisskizze: Sei $N \in \mathbb{N}$ und sei $\mathfrak{M} \subseteq \mathbb{N}$ eine N-elementige Menge. Dann gilt

$$\prod_{m \in \mathfrak{M}} (1+z^m) = \sum_{A \subseteq \underline{N}} z^{\sum_{a \in A} a}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Dabei sei $\sum_{a \in \emptyset} a := 0$. Es folgt, dass $\prod_{m \in \mathfrak{M}} (1+z^m) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, wobei für alle $n \in \mathbb{N}$ c_n die Anzahl der Partitionen mit paarweise verschiedenen Elementen aus $\mathfrak{M}$ sei. Dies gilt analog auch, falls die Menge $\mathfrak{M}$ unendlich ist.

Ferner kann Aussage a. wie in 2.1.1 gezeigt werden. ■

[6] Zur Definition von $\sim$ siehe 2.2.5.

Bemerkungen:

1. Sei $M := \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \equiv_2 1\}$. Dann gilt somit für alle $z \in B_1^{\mathbb{C}}(0)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_u(n) z^k = \prod_{m \in M} \frac{1}{1 - z^m} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 - z^{2n-1}}.$$

2. Es gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_v(n) z^n = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} (1 + z^n)$ für alle $z \in B_1^{\mathbb{C}}(0)$.

2.1.6 Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $p_u(n) = p_v(n)$.

Beweis: Aufgrund der Bemerkungen zu Lemma 2.1.5 reicht es zu zeigen, dass

$$\prod_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 - z^{2k-1}} = \prod_{k \in \mathbb{N}} (1 + z^k)$$

für alle $z \in B_1^{\mathbb{C}}(0)$ gilt, denn dann folgt die Behauptung aus dem Identitätssatz für Potenzreihen.[7] Sei ferner

$$\delta(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n \equiv_2 1 \\ 1, & \text{falls } n \equiv_2 0 \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt dann für alle $z \in B_1^{\mathbb{C}}(0)$, dass

$$\begin{aligned}
\prod_{k \in \mathbb{N}} (1 + z^k) &= \lim_{n \to \infty} \Big(\prod_{k=1}^{n} (1 + z^k) \Big) \overset{|z| < 1}{=} \lim_{n \to \infty} \Big(\prod_{k=1}^{n} \frac{1 - z^{2k}}{1 - z^k} \Big) \\
&= \Big(\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - z^{2k}) \Big) \cdot \Big(\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - z^k} \Big) = \Big(\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{2n} (1 - \delta(k) z^k) \Big) \cdot \Big(\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 - z^k} \Big) \\
&= \lim_{n \to \infty} \Big(\prod_{k=1}^{2n} \frac{(1 - \delta(k) z^k)}{1 - z^k} \Big) = \lim_{n \to \infty} \Big(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - z^{2k-1}} \Big) = \prod_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 - z^{2k-1}}
\end{aligned}$$

gilt. Für alle $z \in B_1^{\mathbb{C}}(0)$ existieren dabei alle uneigentlichen Produkte bzw. alle Grenzwerte wegen der absoluten Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ nach 1.2.5. Insbsondere sind dabei die Reihenfolgen der Multiplikation irrelevant nach 1.2.6. ■

2.2 Asymptotisches Verhalten von $\big(p(n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$

In diesem Paragraphen soll das asymptotische Verhalten der Folge $(p(n))_{n \in \mathbb{N}}$ genauer untersucht werden und eine Formel dafür gefunden werden. Dazu wird nun mit den Vorbereitungen begonnen.

2.2.1 Lemma

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$\ln\big(P(x)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k} \cdot \frac{x^k}{1 - x^k} \Big).$$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\ln\big((1 - x^k)^{-1}\big) = -\ln(1 - x^k) = -\sum_{l=1}^{\infty} \Big(\frac{(-1)^{l+1}}{l} \cdot (-x^k)^l \Big) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^{kl}}{l},$$

[7] Vergleiche Vorlesung „Analysis II“.

wobei die Reihe $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \frac{x^{kl}}{l}$ absolut konvergent ist[8], sowie ferner

$$\Big|\sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^{kl}}{l}\Big| \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{|x|^{kl}}{l} \leq \frac{1}{1-|x|^k} - 1 = \frac{|x|^k}{1-|x|^k} \leq \frac{|x|^k}{1-|x|}.$$

Somit konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Big(\sum\limits_{l=1}^{\infty} \frac{x^{kl}}{l}\Big)$ absolut. Es folgt somit, dass

$$\begin{aligned}
\ln(P(x)) &= \ln\big(\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}\big) = \ln\big(\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}(1-x^k)^{-1}\big) = \lim_{N\to\infty}\Big(\ln\big(\prod_{k=1}^{N}(1-x^k)^{-1}\big)\Big) \\
&= \lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{N}\ln\big((1-x^k)^{-1}\big)\Big) = \lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{x^{kl}}{k}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{x^{kl}}{l}\Big) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{kl}}{l}\Big) = \sum_{l=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}x^{kl}\Big).
\end{aligned}$$

Wegen $|x| < 1$ gilt dabei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{kl} = \frac{x^l}{1-x^l}$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und somit folgt die Behauptung. ∎

2.2.2 Lemma

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < 1$ gilt

$$\ln\big(P(x)\big) \leq \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{x}{1-x}.$$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < 1$. Nach der bernoullischen Ungleichung gilt $y^k - 1 \geq k(y-1)$ für alle $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und für alle $k \in \mathbb{N}$.[9] Damit gilt

$$\frac{x^k}{1-x^k} = \frac{1}{(\frac{1}{x})^k - 1} \leq \frac{1}{k(\frac{1}{x}-1)} = \frac{x}{k(1-x)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit folgt

$$\ln\big(P(x)\big) \overset{2.2.1}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}\cdot\frac{x^k}{1-x^k}\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}\cdot\frac{x}{k(1-x)}\Big) = \frac{x}{1-x}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{x}{1-x}. \ ∎$$

Mithilfe von 2.2.2 folgt eine Abschätzung von $p(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ nach oben, die sich jedoch als schwächer als die asymptotische Formel, die später bewiesen wird, erweist.

2.2.3 Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$p(n) \leq \exp\Big(\pi \cdot \sqrt{\frac{2n}{3}}\Big).$$

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Mit 2.1.3 gilt $p(n)x^n \leq P(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < 1$ und somit folgt

$$\begin{aligned}
\ln(p(n)) &\leq \ln\Big(\frac{P(x)}{x^n}\Big) = \ln\big(P(x)\big) + n\ln\Big(\frac{1}{x}\Big) = \ln\big(P(x)\big) + n\ln\Big(1+\frac{1-x}{x}\Big) \\
&\overset{2.2.2}{\leq} \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{x}{1-x} + n\ln\Big(1+\frac{1-x}{x}\Big) \leq^{10} \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{x}{1-x} + n\frac{1-x}{x}
\end{aligned} \tag{4}$$

[8] Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ gilt $\left|\frac{x^{kl}}{l}\right| \leq |x|^{kl} = |x^l|^k$.

[9] Bernoullische Ungleichung: Für alle $y \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1+y)^k \geq 1 + ky$.

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < 1$. Um nun die gewünschte Abschätzung für $p(n)$ zu erhalten, soll $x \in (0,1)$ derart gewählt werden, dass die rechte Seite der Gleichung (4) minimal wird. Sei dazu $g : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{y} + ny$. Dann nimmt g in $y_0 := \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ sein Minimum an. Damit folgt

$$\ln\big(p(n)\big) \leq g(y_0) = \pi \cdot \sqrt{\frac{2n}{3}}.$$

Da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend und bijektiv ist, folgt die Behauptung. ∎

Bemerkungen:

1. Sei $y_n := \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ und sei x_n definiert vermöge $y_n =: \frac{1-x_n}{x_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ und $1 - x_n = x_n y_n \sim \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ für $\to \infty$.

2. Mit etwas mehr Aufwand kann diese Abschätzung nach oben von $p(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ verbessert werden und ferner kann auch eine Abschätzung nach unten aufgestellt werden.

Um die genaue Asymptotik von $p(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ zu bestimmen, werden komplexe Kurvenintegrale benutzt. Grundlegend ist dabei das folgende Resultat, das eine direkte Folgerung aus der Integralformel von Cauchy ist.

2.2.4 Lemma

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ und sei $R \in \mathbb{R}_{>0}\cup\{\infty\}$ der Konvergenzradius der durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ um 0 definierten Potenzreihe. Sei ferner $f : B_R^{\mathbb{C}}(0) \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $r < R$.

Beweis: Siehe Vorlesung „Analysis IV". ∎

Bemerkungen:

1. Dabei sei für eine stetige Abbildung $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $B_r^{\mathbb{C}}(0) \subset U \subseteq \mathbb{C}$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ das Integral $\int\limits_{|z|=r} g(z)\,dz$ interpretiert als

$$\int\limits_{|z|=r} g(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} g(z)\,dz$$

mit $\gamma : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto re^{it}$. Das heißt, es gilt

$$\int\limits_{|z|=r} g(z)\,dz = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = i\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(re^{it})re^{it}\,dt.$$

Also folgt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{r^n e^{int}}\,dt = \frac{1}{2\pi r^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{e^{int}}\,dt$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $r < R$.

2. Die Reihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ kann auch in der Form $f(re^{it}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}$ geschrieben werden, das heißt, die Reihe kann als Fourierreihe mit Forierkoeffizientenfolge $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ geschrieben werden. Mit anderen Worten: Die obige Formel zur Berechnung der Koeffizienten der Potenzreihe ist nichts anderes als die Formel zur Berechnung der Forierkoeffizienten einer periodischen Funktion.

2.2.5 Definition

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $(\mathbb{C}\backslash\{0\})^{\mathbb{N}}$. Dann werden die Folgen asymptotisch gleich genannt, in falls $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ gilt. In diesem Fall wird auch $a_n\sim b_n$ für $n\longrightarrow\infty$ geschrieben.

2.2.6 Definition

Seien $f,g:U\longrightarrow\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $U\subseteq\mathbb{C}$ zwei Funktionen und sei außerdem $z_0\in\overline{U}\cup\{\infty\}$. Dann heißen f und g asymptotisch gleich für $z\longrightarrow z_0$, falls $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}$ existiert und falls $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=1$ gilt. In diesem Fall wird auch $f(z)\sim g(z)$ für $z\longrightarrow z_0$ geschrieben.

2.2.7 Lemma (Stirlingsche Formel)

Es gilt $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ für $n\longrightarrow\infty$.

Beweis: Für alle $z\in\mathbb{C}$ gilt $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, wobei der Konvergenzradius dieser Potenzreihe gleich ∞ ist. Damit folgt mit 2.2.4 und der Bemerkung dazu, dass

$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{e^z}{z^{n+1}}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{re^{it}}}{(re^{it})^{n+1}}\cdot ire^{it}\,dt=\frac{1}{2\pi r^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp(re^{it}-int)\,dt$$

für alle $n\in\mathbb{N}$ und für alle $r\in\mathbb{R}_{>0}$ gilt. Im Folgenden wird es sich als sinnvoll erweisen, für alle $n\in\mathbb{N}$ zur Berechnung von $\frac{1}{n!}$ für das Integral $r=n$ zu wählen.[11] Sei

$$T:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\ z\longmapsto\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+3}}{(n+3)!}z^n.$$

Sei R der Konvergenzradius dieser Potenzreihe. Dann gilt

$$R^{-1}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{i^{n+3}}{(n+3)!}\right|}=\sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\inf_{k\geq n}\sqrt[n]{\left|\frac{i^{n+3}}{(n+3)!}\right|}\Big)=0$$

nach der Formel von Cauchy-Hadamard wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(n+3)!}}=0$, und somit ist der Konvergenzradius gleich ∞. Also ist T holomorph[12] und somit existiert ein $\delta\in(0,\frac{5}{4})\subseteq\mathbb{R}_{>0}$ mit $T(B_\delta^{\mathbb{C}}(0))\subseteq B_{\frac{1}{30}}^{\mathbb{C}}(T(0))$. Das heißt, für alle $z\in B_\delta^{\mathbb{C}}(0)$ gilt

$$|T(z)|\leq|T(z)-T(0)|+|T(0)|<\frac{1}{30}+\Big|-\frac{i}{6}\Big|=\frac{1}{5}.$$

Ferner gilt für alle $t\in\mathbb{R}$

$$e^{it}=1+it-\frac{1}{2}t^2+T(t)t^3$$

und somit

$$re^{it}=r\big(1+it-\frac{1}{2}t^2+T(t)t^3\big)-int=r+(r-n)it-\frac{r}{2}t^2+rT(t)t^3 \tag{5}$$

für alle $r\in\mathbb{R}_{>0}$ nach Konstruktion von T. Diese Gleichung legt nun nahe, für alle $n\in\mathbb{N}$ zur Berechnung von $\frac{1}{n!}$ das Integral $\frac{1}{2\pi n^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp(ne^{it}-int)\,dt$ zu betrachten. Dabei folgt dann mit Vorherigem für alle $n\in\mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}&=\frac{1}{2\pi n^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp(ne^{it}-int)\,dt=\frac{1}{2\pi n^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp\big(n-\frac{n}{2}t^2+nT(t)t^3\big)\,dt\\&=\frac{e^n}{2\pi n^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp\big(-\frac{n}{2}t^2+nT(t)t^3\big)\,dt=\frac{e^n}{2\pi n^n}(I_1^n+I_2^n)\end{aligned}$$

[11] Siehe Gleichung (5) dazu.

[12] Auf jedem Kompaktum des Konvergenzkreises liegt gleichmäßige Konvergenz vor.

mit $I_1^n := \int\limits_{-\delta}^{\delta} \exp\big(-\frac{n}{2}t^2 + nT(t)t^3\big)\,dt$ sowie mit $I_2^n := \int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} \exp\big(-\frac{n}{2}t^2 + nT(t)t^3\big)\,dt$ gilt. Es folgt:

1. Es gilt mit $a_n := \sqrt{0,5\,n}$

$$I_1^n = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \exp\big(-a_n^2 t^2 + nT(t)t^3\big)\,dt \overset{\text{Subst.}}{=} \sqrt{2n^{-1}} \int\limits_{-a_n\delta}^{a_n\delta} e^{-s^2+\sqrt{6n^{-1}}\cdot T\left(\sqrt{2n^{-1}}s\right)\cdot s^3}\,ds$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n\, I_1^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2}}\, I_1^n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-s^2)\,ds \overset{\text{Übungsserie 1}}{=} \sqrt{\pi}$$

   nach dem Satz von Lebesque über majorisierende Konvergenz, denn es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $s \in (-a_n\,\delta, a_n\,\delta)$ gilt $|\sqrt{6n^{-1}} \cdot T\big(\sqrt{2n^{-1}}s\big) \cdot s^3 \le \frac{1}{2}s^2$ und somit haben die Integranten jeweils eine integrierbare Majorante.

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|I_2^n| = e^{-n}|e^n I_2^n| \le e^{-n} \int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} \big|\exp(ne^{it} - int)\big|\,dt \le 2e^{-n}(\pi-\delta)\cdot \max_{\delta\le|t|\le\pi} |\exp(ne^{it} - int)|$$

$$= 2e^{-n}(\pi-\delta)\cdot \max_{\delta\le|t|\le\pi} e^{\mathrm{Re}(ne^{it}-int)} = 2e^{-n}(\pi-\delta)\cdot \max_{\delta\le|t|\le\pi} e^{n\cos(t)} \overset{\delta\,\in\,(0,\,\frac{5}{4})}{=} 2(\pi-\delta)\cdot e^{(\cos(\delta)-1)n}$$

   mit $\cos(\delta) \in (0,1)$ und somit folgt wegen $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$

$$0 \le \Big|\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} I_2^n\Big| \le \frac{2(\pi-\delta)}{\sqrt{2\pi}\cdot(1-\cos(\delta))} \cdot \Big(\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\cos(\delta))n}{\exp((1-\cos(\delta))n)}\Big) = 0.$$

Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{n!} = 1$ und damit folgt die Behauptung aus den Limesrechenregeln. ■

Bemerkungen:

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Analog zum Beweis von 2.2.3 gilt $\frac{x^n}{n!} \le \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ und somit $\frac{1}{n!} \le \exp(x - n\ln(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\ge 0}$. Auch in diesem Fall soll nun die rechte Seite dieser Ungleichung minimiert werden. Wegen $\frac{d}{dy}\Big|_{y=x}(y - n\ln(y)) = 1 - \frac{n}{y}$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ folgt, dass das Minimum in $x_0 := n$ angenommen wird. Damit folgt $\frac{1}{n!} \le \frac{e^n}{n^n}$ und somit gilt $n! \ge \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Exkurs zur Sattelpunktmethode

Sei $R \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ und sei $f : B_R^{\mathbb{C}}(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei ferner $r < R$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Bei der Berechnung des Integrales

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi r^n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{e^{int}}\,dt$$

ist es oft sinnvoll, r als kritischen Punkt der Funktion $h : B_R^{\mathbb{C}}(0)\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \frac{f(z)}{z^n}$ zu wählen, sofern dies möglich ist. Das heißt, r wird derart gewählt, dass $h'(r) = 0$ gilt. Dann ist r ein Sattelpunkt der Funktion $|h|$.

Im Beweis von 2.2.7 wurde diese Methode für $f = \exp$ durchgeführt und heißt Sattelpunktmethode.

Es existiere nun eine holomorphe Funktion $g : B_R^{\mathbb{C}}(0) \longrightarrow \mathbb{C}$, so dass $f(z) = e^{g(z)}$ für alle $z \in B_R^{\mathbb{C}}(0)$

gilt. Ferner existiere $r < R$, so dass $h'(r) = 0$ für die oben definierte Funktion h gilt. Es folgt dann, dass

$$\begin{aligned} 0 = h'(r) &= \frac{r^n g'(r) e^{g(r)} - n r^{n-1} e^{g(r)}}{r^{2n}} = e^{g(r)} \cdot \Big(\frac{g'(r)}{r^n} - \frac{n}{r^{n+1}} \Big) \\ &= \frac{e^{g(r)}}{r^n} \cdot \Big(g'(r) - \frac{n}{r} \Big) \end{aligned}$$

gilt. Also gilt $g'(r) = \frac{n}{r}$. Sei nun $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ derart gewählt, dass $B_\epsilon^{\mathbb{C}}(r) \subseteq B_R^{\mathbb{C}}(0)$ gilt. Da

$$e^{it} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} =: 1 + it - \frac{t^2}{2} + S(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, gilt dann

$$\begin{aligned} g(re^{it}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(r)}{k!} (re^{it} - r)^k \\ &= g(r) + g'(r) \cdot (re^{it} - r) + \frac{g''(r)}{2} \cdot (re^{it} - r)^2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} \frac{g^{(k)}(r)}{k!} (re^{it} - r)^k}_{=: T(t)} \\ &= g(r) + \frac{n}{r} \cdot r \cdot \big(it - \frac{t^2}{2} + S(t) \big) + \frac{r^2 g''(r)}{2} \cdot \big(it - \frac{t^2}{2} + S(t) \big)^2 + T(t) \\ &= g(r) + nit - \frac{1}{2} \big(n + r^2 g''(r) \big) t^2 + U(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in [-\pi, \pi]$ mit $re^{it} \in B_\epsilon^{\mathbb{C}}(r)$, wobei U geeignete auf $B_\epsilon^{\mathbb{C}}(r)$ definierte holomorphe Funktion sei. Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz &= \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{e^{int}}\, dt = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\big(g(re^{it}) - int \big)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\Big(g(r) + nit - \frac{1}{2} \big(n + r^2 g''(r) \big) t^2 + U(t) - int \Big)\, dt \\ &= \frac{e^{g(r)}}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\Big(-\frac{1}{2} \big(n + r^2 g''(r) \big) t^2 + U(t) \Big)\, dt, \end{aligned}$$

wobei

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp\Big(-\frac{1}{2} \big(n + r^2 g''(r) \big) t^2 + U(t) \Big)\, dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n + r^2 g''(r)}}$$

gilt, falls der $e^{U(t)}$-Term gut abgeschätzt werden kann.

Notationen
Es seien $\mathbb{D} := B_1^{\mathbb{C}}(0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$ sowie $H_0 := \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0 \}$. Außerdem sei

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0} \longrightarrow \{ w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} \in (-\pi, \pi) \},\ z \longmapsto \ln(|z|) + i \cdot \arg(z),$$

das heißt, Log ist also derjenige Hauptzweig des komplexen Logarithmus mit $\mathrm{Log}|_{\mathbb{R}_{>0}} = \ln$.

Um die Asymptotik von $\big(p(n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ besser bestimmen zu können, muss P genauer als bisher (vergleiche 2.2.2) abgeschätzt werden. Dazu sei zunächst bemerkt, dass sich Lemma 2.2.1 wie folgt verallgemeinern lässt:

2.2.8 Lemma

Für alle $z \in \mathbb{D}\backslash P^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0})$ gilt

$$\mathrm{Log}(P(z)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k(1-z^k)}.$$

Beweis: Für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $\left|\frac{z^k}{1-z^k}\right| \leq \frac{|z|^k}{1-|z|^k} \leq \frac{\epsilon^k}{1-\epsilon^k}$ für alle $z \in B_\epsilon^{\mathbb{C}}(0)$ und für alle $k \in \mathbb{N}$, und die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k(1-\epsilon^k)}$ konvergiert für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ nach Lemma 2.2.1 absolut.Damit konvergiert die Folge $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ mit $S_N : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{z^k}{k(1-z^k)}$ für alle $N \in \mathbb{N}$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{D}$ gegen die Funktion $S : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k(1-z^k)}$. Da S_N für alle $N \in \mathbb{N}$ holomorph ist, ist somit S nach dem Satz von Weierstraß holomorph. Damit folgt mit 2.2.1 und mit $\mathrm{Log}|_{\mathbb{R}_{>0}} = \ln$ die Behauptung nach dem Identitätssatz. ∎

Es soll nun das Verhalten von $P(z)$ für $z \longrightarrow 1$ untersucht werden. Wegen $|e^{-w}| = e^{-\mathrm{Re}(w)}$ für alle $w \in \mathbb{C}$ ist die Abbildung $T : H_0 \longrightarrow \mathbb{D}\backslash(-1,0],\ w \longmapsto e^{-w}$ wohldefiniert und holomorph, die ferner surjektiv ist. Dann gilt nach Lemma 2.2.8

$$\mathrm{Log}(P(e^{-w})) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kw}}{k(1-e^{-kw})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(e^{wk}-1)}$$

für alle $w \in H_0$ mit $P(e^{-w}) \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$. Da $P((-1,1)) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ gilt, und da P holomorph ist, existiert $U \subseteq \mathbb{D}$ offen, so dass $(-1,1) \subseteq U$ und $P(U) \subseteq \mathbb{C}\backslash P^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0})$ gilt. Somit existiert $V \subseteq H_0$ offen mit $0 \in \partial V$, so dass $P(e^{-w}) \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ für alle $w \in V$ gilt.
Damit entspricht die Betrachtung von $P(z)$ mit $z \longrightarrow 1$ in U einer Betrachtung von $P(e^{-1})$ mit $w \longrightarrow 0$ in V.

Erinnerung

Sei $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $N \in \mathbb{N}$. Sei ferner $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, wobei $U \subseteq H_0$ ein Gebiet mit $(0, N\delta) \subseteq U$ sei. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{g(k\delta)}{k} = \sum_{k=1}^{N} \delta \cdot \frac{g(k\delta)}{k\delta} = \delta \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{g(k\delta)}{k\delta}$$

eine riemannsche Summe für das Integral $\int\limits_0^{N\delta} \frac{g(t)}{t}\, dt.$

Die Idee ist nun, eine geeignete Funktion $g : H_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ zu finden, so dass das uneigentliche Integral $\int\limits_0^{\infty} \frac{g(t)}{t}\, dt$ existiert, und so dass für alle $w \in H_0$ mit $P(e^{-w}) \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ die Summe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(e^{wk}-1)}$ durch dieses Integral in Abhängigkeit von $|w|$ gut approximiert werden kann. Jedoch kann g nicht einfach vermöge $g(t) = \frac{1}{\exp(t)-1}$ für alle $t \in H_0$ gewählt werden, da die Folge $\Big(\int\limits_0^{n} \frac{g(t)}{t}\, dt\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent ist. Das entspricht auch der Tatsache, dass $P(z) \longrightarrow \infty$ für $z \longrightarrow 1$ erwartet werden kann. Damit wird wie folgt verfahren:

<u>Idee:</u> Sei $g : H_0 \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto \frac{1}{\exp(t)-1}$. Sei dann $h : H_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ derart gewählt, dass $\int\limits_0^{\infty} \frac{g(t)-h(t)}{t}\, dt$ konvergiert, und dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{h(kw)}{k}$ für alle $w \in H_0$ mit $P(e^{-w}) \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ berechnet werden kann.

Es gilt $g(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2e^z} + O(z)$ für $z \longrightarrow 0$, denn:
Sei

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \begin{cases} \frac{e^z-1}{z}, \text{ falls } z \neq 0 \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}.$$

Dabei ist 0 wegen $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$ eine hebbare Singularität von $f\big|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ mit $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$ nach L'Hospital. Damit sind f und $\hat{f} := \frac{1}{f}$ holomorph. Nach der Integralsatz von Cauchy gilt somit

$$\hat{f}(z) = \hat{f}(0) + \hat{f}'(0)t + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\hat{f}^{(k)}(0)}{k!} z^k = 1 - \frac{t}{2} + O(z^2)$$

für $z \longrightarrow 0$. Also gilt wegen $\lim_{t\to 0} e^{-t} = 1$

$$g(z) = \frac{\hat{f}(z)}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + O(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2e^z} + O(z)$$

für $z \longrightarrow 0$.

Dies legt nahe, die Funktion h folgender Maßen zu wählen: Sei

$$h : H_0 \longrightarrow \mathbb{C},\ w \longmapsto \frac{1}{w} - \frac{1}{2e^w}.$$

Dann gilt:

a. Das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty \frac{g(t)-h(t)}{t}\, dt$ existiert nach Lemma 2.2.9.

b. Wegen $\operatorname{Log}(1+z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}$ für alle $z \in \mathbb{D}$ folgt

$$-\operatorname{Log}(1-e^{-w}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}(-e^{-w})^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{ke^{kw}}$$

für alle $w \in H_0$. Damit gilt

$$\frac{1}{w} \cdot \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1-e^{-w}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{wk^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2ke^{kw}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(kw)}{k}$$

für alle $w \in H_0$.

Damit folgt für alle $w \in H_0$ mit $P(e^{-w}) \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$, dass

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(P(e^{-w})) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(e^{kw}-1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k(e^{kw}-1)} - \frac{h(kw)}{k}\Big) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(kw)}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{e^{kw}-1} - \frac{1}{kw} + \frac{1}{2e^{kw}}\Big)\Big) + \frac{\pi^2}{6w} + \frac{\operatorname{Log}(1-e^{-w})}{2}\end{aligned} \tag{6}$$

gilt.

2.2.9 Lemma

Es gilt $\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2e^t}\Big)\, dt = \ln\big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

Beweis: Sei

$$S : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2e^t}\Big).$$

Es wurde bereits im Vorherigen gezeigt, dass $g(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2e^z} + O(z)$ für $z \longrightarrow 0$ gilt. Also existieren $\epsilon, K \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$\Big|\frac{1}{t}\Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2e^t}\Big| = \Big|\frac{g(t)-h(t)}{t}\Big| \leq K$$

für alle $t \in (0, \epsilon]$ gilt. Somit die stetige Funktion S nach dem Satz über majorisierende Konvergenz integrierbar, wobei wegen der Stetigkeit $I := \int\limits_0^\infty S(t)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}_{>0}} S(t)\,dt$ gilt. Sei ferner

$$S_n : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \frac{1-e^{-nt}}{t}\Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2e^t}\Big)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert $\int\limits_0^\infty S_n(t)dt$ für alle $n \in \mathbb{N}$ analog zu oben nach dem Satz über majorisierende Konvergenz. Insbesondere liefert der Satz über majorisierende Konvergenz

$$I = \int\limits_0^\infty \big(\lim_{n\to\infty} S_n(t)\big)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty S_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\big(A_n + B_n\big)$$

mit

$$A_n := \int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-nt}}{t}\Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big)\,dt$$

und

$$B_n := \int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-nt}}{2te^t}\,dt$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.[13] Damit folgt:

1. Für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1-e^{-nt}}{e^t-1} = \frac{1}{e^t}\cdot\frac{1-e^{-nt}}{1-e^{-t}} = \frac{1}{e^t}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{e^{kt}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e^{kt}}$$

und somit

$$(1-e^{-nt})\Big(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}\Big) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{e^{kt}} - \frac{1-e^{-nt}}{t} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{e^{kt}} - \frac{1}{t}\cdot\sum_{k=1}^n\Big(e^{-(k-1)t} - \frac{1}{e^{kt}}\Big)$$
$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{e^{kt}} - \sum_{k=1}^n\Big(\frac{1}{e^{kt}}\cdot\frac{e^t-1}{t}\Big) = \sum_{k=1}^n\Big(\frac{1}{e^{kt}}\Big(1-\frac{e^t-1}{t}\Big)\Big) = \sum_{k=1}^n\Big(\frac{1}{e^{kt}}\cdot\frac{1+t-e^t}{t}\Big).$$

Also gilt wegen $\frac{1+t-e^t}{te^{kt}} > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ $A_n = \sum\limits_{k=1}^n\Big(\int\limits_0^\infty \frac{1+t-e^t}{t^2e^{kt}}\ dt\Big)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mittels partieller Integration gilt ferner

$$\frac{1+t-e^t}{t^2} = \Big[\frac{xe^{(1-x)t}}{t}\Big]_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{e^{(1-x)t}}{t}\,dx = -\int\limits_0^1 xe^{(1-x)t}\,dx$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Damit folgt

$$A_n = -\sum_{k=1}^n\Big(\int\limits_0^1\int\limits_0^\infty e^{-kt}xe^{(1-x)t}\,dt\,dx\Big) = -\sum_{k=1}^n\Big(\int\limits_0^1\frac{x}{k+x-1}\,dx\Big)$$
$$= -1 + \sum_{k=2}^n\Big((k-1)\ln\big(\frac{k}{k-1}\big)-1\Big) = -n + \sum_{k=2}^n\Big((k-1)\ln(k)-(k-1)\ln(k-1)\Big)$$
$$= -n + \sum_{k=2}^n(k-1)\ln(k) + \sum_{k=1}^{n-1}k\ln(k) = -n + (n-1)\ln(n) - \sum_{k=2}^{n-1}\ln(k)$$
$$= -n + n\ln(n) - \sum_{k=2}^n \ln(k) = -n + n\ln(n) - \ln(n!)$$

[13] Existenz der Integral kann analog zu oben bewiesen werden.

mit dem Satz von Fubini für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Desweiteren gilt

$$\frac{1-e^{-nt}}{2te^t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-1} - e^{-(n+1)t}}{t} = \frac{1}{2} \int\limits_1^{n+1} e^{-tx}\ dx$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ und somit folgt mit Fubini

$$B_n = \frac{1}{2} \int\limits_1^{n+1} \int\limits_0^{\infty} e^{-tx}\ dt\ dx = \frac{1}{2} \int\limits_1^{n+1} \frac{1}{x}\ dx = \frac{\ln(n+1)}{2}$$

Insgesamt folgt mit der stirlingschen Formel (siehe 2.2.7) und mit der Stetigkeit von ln somit

$$I = \lim_{n\to\infty} \big(A_n + B_n\big) = \lim_{n\to\infty} \ln\Big(\frac{n^n\sqrt{n+1}}{e^n \cdot n!}\Big) = \lim_{n\to\infty} \ln\Big(\frac{\sqrt{n}}{n!}\big(\frac{n}{e}\big)^n\Big) + \lim_{n\to\infty} \ln\Big(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\Big)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \ln\Big(\frac{\sqrt{n}}{n!}\big(\frac{n}{e}\big)^n\Big) + \lim_{n\to\infty} \ln\Big(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\Big) = \ln\Big(\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{\sqrt{n}}{n!}\big(\frac{n}{e}\big)^n\Big)\Big) + \ln\Big(\lim_{n\to\infty}\Big(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\Big)\Big)$$
$$= \ln\big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big) + \ln(1) = \ln\big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big)$$

mit den Limesrechenregeln. ∎

2.2.10 Lemma
Für alle $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ existiert $M_\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{e^{kw}-1} - \frac{1}{kw} + \frac{1}{2e^{kw}}\Big)\Big) - \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2e^t}\Big)\ dt\Big| \le M_\alpha |w|$$

für alle $w \in \overline{\mathbb{D}}$ mit $|\arg(w)| \le \alpha$ gilt.
Beweis: Siehe S.21. ∎

Sei im Folgenden M_α mit $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ stets mit den Eigenschaften aus dem vorherigen Lemma gewählt.

Zum Beweis von Lemma 2.2.10 wird das folgende Lemma benötigt:

2.2.11 Lemma
Sei $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Seien ferner $N \in \mathbb{N}$ und $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt

$$\Big|\int\limits_0^{N\delta} f(t)dt - \delta \sum_{k=1}^{N} f(k\delta)\Big| \le \delta \int\limits_0^{N\delta} |f'(t)|\ dt.$$

Beweis: Siehe Übungsserie 5, Aufgabe 1. ∎
Bemerkungen:

1. Es gilt sogar die Behauptung für $N = \infty$ (mit $n\delta = \infty$ dann), falls die uneigentlichen Integrale existieren.

Beweisidee von Lemma 2.2.10:
Sei $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ und sei für alle $v \in \partial B_1^{\mathbb{C}}(0)$ die differenzierbare Abbildung $f_v : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert vermöge

$$f_v(t) := \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{e^{vt}-1} - \frac{1}{vt} + \frac{1}{2e^{vt}}\Big)\ dt$$

für alle $t \in [0, \infty)$. Dann existiert nach 2.2.9 das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty f_1(t)\ dt$ und mit der Substitutionsregel folgt für alle $v \in \partial B_1^{\mathbb{C}}(0)$, dass

$$\int\limits_0^\infty f_v(t)\ dt = \int\limits_0^\infty f_1(t)\ dt$$

gilt. Ferner kann gezeigt werden, dass $\int\limits_0^\infty |f_v'(t)|\ dt$ für alle $v \in \partial B_1^{\mathbb{C}}(0)$ existiert, und dass ferner ein $M_\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\int\limits_0^\infty |f_v'(t)|\ dt \leq M_\alpha$ für alle $v \in \partial B_1^{\mathbb{C}}(0)$ mit $|\arg(v)| \leq \alpha$ existiert. Damit liefert 2.2.11 zusammen mit der dazugehörigen Bemerkung, dass

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{k=1}^\infty \Big(\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{e^{kw}-1} - \frac{1}{kw} + \frac{1}{2e^{kw}}\Big)\Big) - \int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2e^t}\Big)\ dt\Big| \\
&= \Big|\sum_{k=1}^\infty \Big(\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{e^{k|w|v}-1} - \frac{1}{k|w|v} + \frac{1}{2e^{k|w|v}}\Big)\Big) - \int\limits_0^\infty f_1(t)\ dt\Big| \\
&= \Big|\int\limits_0^\infty f_v(t)dt - |w|\sum_{k=1}^\infty f_v(k|w|)\Big| \leq |w|\int\limits_0^\infty |f_v'(t)|\ dt \leq M_\alpha |w|
\end{aligned}$$

mit $v := e^{i\arg(w)}$ für alle $w \in \overline{\mathbb{D}}$ mit $|\arg(w)| \leq \alpha$ gilt. ■

Für alle $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ sei im Folgenden $M_\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ gewählt nach 2.2.10. Mit (6) und mit 2.2.9 gilt dann

$$\operatorname{Log}(P(e^{-w})) = \frac{\pi^2}{6w} + \frac{\operatorname{Log}(1-e^{-w})}{2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi) + R_0(w) \tag{7}$$

für alle $w \in U := \{w \in \mathbb{D} \cap H_0 \mid P(e^{-w}) \notin \mathbb{R}_{\leq 0}\}$,[14] wobei

$$R_0 : U \longrightarrow \mathbb{C},\ w \longmapsto \sum_{k=1}^\infty \Big(\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{e^{kw}-1} - \frac{1}{kw} + \frac{1}{2e^{kw}}\Big)\Big) - \int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2e^t}\Big)\ dt \tag{8}$$

sei.[15] Dann folgt also für alle $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, dass $|R_0(w)| \leq M_\alpha |w|$ für alle $w \in U$ mit $|\arg(w)| \leq \alpha$ gilt.
Es soll nun untersucht werden, wie für $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ die Bedingung $|\arg(w)| \leq \alpha$ für $w \in U$ als eine Bedingung für e^{-w} ausgedrückt werden kann, damit (**??**) in eine entsprechende Gleichung für $\operatorname{Log}(P(z))$ umgeschrieben werden kann.
Für alle $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ und für alle $w \in U$ gilt

$$\begin{aligned}
|w| &= \sqrt{(\operatorname{Re}(w))^2 + (\operatorname{Im}(w))^2} = \sqrt{(\operatorname{Re}(w))^2 + \tan(\arg(w))^2(\operatorname{Re}(w))^2} \\
&= |\operatorname{Re}(w)| \cdot \sqrt{1 + \tan(\arg(w))^2} = \frac{|\operatorname{Re}(w)|}{\cos(\arg(w))}
\end{aligned}$$

und somit gilt wegen $\arg(w) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ die folgenden Äquivalenz:

$$|\arg(w)| \leq \alpha \Longleftrightarrow \cos(\arg(w)) \geq \cos(\alpha) \Longleftrightarrow |w| \leq \frac{|\operatorname{Re}(w)|}{\cos(\alpha)} \Longleftrightarrow \frac{|w|}{|\operatorname{Re}(w)|} \leq \frac{1}{\cos(\alpha)}.$$

Ferner gilt $|1 - e^{-w}| \sim |w|$ und $1 - |e^{-w}| \sim \operatorname{Re}(w)$ für $w \longrightarrow 0$ in H_0. Also gilt

$$\frac{|1-e^{-w}|}{1-|e^{-w}|} \sim \frac{|w|}{|\operatorname{Re}(w)|}$$

[14] Da P holomorph mit $P((-1,1)) \subseteq H_0$ ist, existiert ein $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_\epsilon^{\mathbb{C}}(0) \cap H_0 \subseteq U$ gilt.
[15] Dabei ist $U \subseteq C$ offen, da P holomorph ist.

für $w \longrightarrow 0$ in H_0. Sei nun

$$S_\beta := \left\{z \in \mathbb{D} \;\Big|\; \frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \beta,\ |z| \geq \frac{1}{2}\right\} \setminus P^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0}) \tag{9}$$

für alle $\beta \in \mathbb{R}_{>1}$. Dann gilt für alle $\beta \in \mathbb{R}_{>1}$, $r \in [\frac{1}{2}, 1)$ und für alle $t \in [-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} re^{it} \in S_\beta &\iff \frac{|1-re^{it}|}{1-r} \leq \beta \\ &\iff \beta^2(1-r)^2 \geq |1-re^{it}|^2 = 1 - 2r\cos(t) + r^2 \\ &\iff \cos(t) \geq \frac{1+r^2-\beta^2(1-r)^2}{2r} = 1 - \underbrace{\frac{(\beta^2-1)(1-r)^2}{2r}}_{>0}. \end{aligned}$$

Also gilt insbesondere $S_\beta \neq \emptyset$ für alle $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Insgesamt folgt nun:

2.2.12 Lemma

Für alle $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ existieren außerdem $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, so dass für alle $z \in S_\beta \cap B_\delta^{\mathbb{C}}(1)$ Folgendes gilt:

a. Es existiert $w \in U$ mit $e^{-w} = z$.

b. Für alle $w \in U$ mit $e^{-w} = z$ gilt $\frac{|w|}{|\mathrm{Re}(w)|} \leq \frac{1}{\cos(\alpha)}$.

Beweis: Hier nicht. ∎

Sei

$$T : \mathbb{D}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow H_0,\ z \longmapsto -\mathrm{Log}(z)$$

und sei

$$R_1 : T^{-1}(U)\backslash P^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0}) \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto R_0(T(z)). \tag{10}$$

Dann gilt für alle $\beta \in \mathbb{R}_{>1}$ mit α und δ gewählt mit obigen Eigenschaften:

a. Sei $z \in S_\beta \cap B_\delta^{\mathbb{C}}(1)$ und sei $w \in H_0 \cap \overline{\mathbb{D}}$ mit $e^{-w} = z$. Dann folgt wegen $\frac{|w|}{|\mathrm{Re}(w)|} \leq \frac{1}{\cos(\alpha)}$ nach obigen Rechnungen, dass $|\arg(w)| \leq \alpha$ und somit $|R_1(z)| = |R_0(w)| \leq M_\alpha|w|$ gilt.

b. Da $S_\beta\backslash B_\delta^{\mathbb{C}}(1) = \{z \in S_\beta \mid |z-1| \geq \delta\}$ kompakt ist,[16] ist die holomorphe Funktion R_1 auf dieser Menge beschränkt.

Ferner kann nun Gleichung (7) für alle $z \in \mathbb{D}(R_1)$ in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\mathrm{Log}(P(z)) = -\frac{\pi^2}{6\mathrm{Log}(z)} + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(1-z) - \frac{1}{2\ln(\sqrt{2\pi})} + R_1(z).$$

Die restliche Vorgehensweise zum Bewei, dass $p(n) \sim \frac{\exp\left(\pi\cdot\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n}$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt, wird im Folgenden lediglich skizziert:

Beweisskizze

Es gilt $w = -\mathrm{Log}(z) = -\mathrm{Log}(1+(z-1))$ und somit folgt $|w| = |z-1| + O(|z-1|^2)$ für $z \longrightarrow 1$. Die Abschätzung $|R_0(w)| \leq M_\alpha|w|$ übersetzt sich in $|R_1(z)| \leq M|z-1|$. Also gilt

$$\mathrm{Log}(P(z)) = -\frac{\pi^2}{6\mathrm{Log}(z)} + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(1-z) - \frac{1}{2\ln(\sqrt{2\pi})} + R_1(z)$$

mit $|R_1(z)| \leq M|z-1|$ für alle $z \in S_\beta$ und für alle $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Da $e^x - 1 = x + O(x^2)$ für $x \longrightarrow 0$ gilt, folgt

$$|\exp(R_1(z)) - 1| \leq K_\beta|z-1|$$

für alle $z \in S_\beta$ mit $K_\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Sei nun $\eta(z) := \exp(R_1(z)) - 1$. Es folgt:

[16] Da $P^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0}) = P^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$ gilt, ist S_β abgeschlossen als Schnitt von abgeschlossenen Mengen und ferner ist S_β auch beschränkt. Somit ist S_β nach Heine-Borell kompakt.

2.2.13 Lemma

Für alle $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ existiert $K_\beta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$P(z) = \sqrt{\frac{1-z}{2}} \cdot \exp\Big(-\frac{\pi^2}{6\mathrm{Log}(z)}\Big) \cdot \big(1+\eta(z)\big)$$

für alle $z \in S_\beta$ gilt. Dabei gilt $|\eta(z)| \leq K_\beta |z-1|$ für alle $z \in S_\beta$.

Für alle $n \in \mathbb{R}$ und für alle $r \in (0,1)$ gilt

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{P(z)}{z^{n+1}}\, dz.$$

Setze nun $r_n := \exp\big(-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\big)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $1 - r_n \sim \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ für $n \longrightarrow \infty$. Ferner gilt für alle $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $\theta \in [-\pi, \pi]$:

$$r_n e^{i\theta} \in S_\beta \Longleftrightarrow |\theta| \leq \theta_n(\beta) := \arccos\Big(1 - \frac{(\beta^2-1)(1-r_n)^2}{2r_n}\Big).$$

Ferner gilt $\arccos(1-x^2) = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}x^3}{12} + \ldots$. Es folgt, dass

$$\theta_n(\beta) = \sqrt{\frac{2(\beta^2-1)}{2r_n}} \cdot (1-r_n) + O\big((1-r_n)^3\big) \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{\pi(\beta^2-1)}{6n}} \cdot \big(1 + O(n^{-0.5})\big)$$

für alle $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei $\gamma_\beta := \sqrt{\frac{\beta^2-1}{6}}$ für alle $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 1}$.
Sei

$$G : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 1} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sqrt{\frac{1-z}{2\pi}} \cdot \exp(-\frac{\pi^2}{6\mathrm{Log}(z)})$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie für alle $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ seien

$$p_1^\beta(n) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|z|=r_n \\ |\arg(z)| \leq \theta_n(\beta)}} \frac{G(z)}{z^{n+1}} dz \qquad p_2^\beta(n) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|z|=r_n \\ |\arg(z)| \leq \theta_n(\beta)}} \frac{F(z)-G(z)}{z^{n+1}} dz$$

$$p_3^\beta(n) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|z|=r_n \\ \theta_n(\beta) \leq |\arg(z)|}} \frac{G(z)}{z^{n+1}} dz$$

Damit gilt $p(n) = \sum\limits_{k=1}^{3} p_k^\beta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Außerdem sei

$$q(n) := \frac{\exp\big(\sqrt{\frac{2n}{3}}\big)}{4\sqrt{3}n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt:

2.2.14 Satz

Es gilt $p(n) \sim q(n)$ für $n \longrightarrow \infty$.

Beweisidee: Bei geschickter Wahl von $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ kann geweigt werden, dass $p_1^\beta(n) \sim q(n)$ und $p_2^\beta(n),\ p_3^\beta(n) = o\big(q(n)\big)$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt. ■

3 Primzahlen

3.1 Der Primzahlensatz und sein Beweis

Notation
Mit $\mathbb{P}$ sei die Menge der Primzahlen bezeichnet.

3.1.1 Satz
Es gilt $|\mathbb{P}| = \infty$.
Beweis: Angenommen es gilt $|\mathbb{P}| < \infty$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{P} =: \{p_k \,|\, k \in \underline{N}\}$. Sei $m := \prod\limits_{k=1}^{N} p_k + 1$. Dann gilt $p_k \nmid m$ für alle $k \in \underline{N}$ und somit folgt $m \in \mathbb{P}$. Ferner gilt $m \neq p_k$ für alle $k \in \underline{N}$. $\lightning$
Also gilt $|\mathbb{P}| = \infty$. $\blacksquare$

Im Folgenden sei $\mathbb{P} =: \{p_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ mit $p_k < p_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ferner wird des Öfteren bei Summationen der Zusatz $p \in \mathbb{P}$ ausgelassen, wobei die Variable p ausschließlich für Primzahlen verwendet wird.

3.1.2 Definition
Für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei $\pi(x) := \big|\mathbb{P} \cap [0,x]\big|$.

3.1.3 Satz (Primzahlensatz)
Es gilt $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$ für $x \longrightarrow \infty$.
Beweis: Siehe Seite 38. $\blacksquare$

Dieses Ergebnis wurde bereits um 1800 von Gauß und anderen Mathematikern vermutet und 1896 von Hadamard und de la Vallée-Poussin unabhängig voneinander mit Methoden der (komplexen) Analysis bewiesen. Der Primzahlsatz soll auch nun bewiesen werden, wobei aber auf diverse, von verschiedenen Mathematikern gefundene Vereinfachungen des ursprünglichen Beweises zurückgegriffen werden kann. Zunächst sollen einige elementare Abschätzungen aufgestellt werden. Dazu ist es sinnvoll, für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ neben $\pi(x)$ auch den folgenden Wert zu betrachten:

3.1.4 Definition
Für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei $\theta(x) := \big(\sum\limits_{p \leq x} \ln(p)\big) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.[17]

Bemerkungen:

1. Für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 2}$ gilt offensichtlich
$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln(p) \leq \sum_{p \leq x} \ln(x) = \ln(x) \cdot \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x)\ln(x)$$
und somit $\frac{\theta(x)}{\ln(x)} \leq \pi(x)$. Später liefert Gleichung (15) mit $\epsilon \longrightarrow 0$, dass $\pi(x) \leq \big(1 + o(1)\big)\frac{\theta(x)}{\ln(x)}$ für $x \longrightarrow \infty$ gilt.

3.1.5 Lemma
Es gilt $\pi(x) \sim \frac{\theta(x)}{\ln(x)}$ für $x \longrightarrow \infty$.
Beweis: Siehe Seite 29. $\blacksquare$

[17] Dabei gilt $\theta(x) = \sum\limits_{p \in \emptyset} \ln(p) = 0$ für alle $x \in [0,2)$.

Erinnerung zur Definition der Landau-Symbole
Sei $a \in \mathbb{R}$ und seinen $f, g : (a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen.

a. Es gilt $f(x) = o(g(x))$ für $x \longrightarrow \infty$, falls für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $R \in \mathbb{R}_{>a}$ existiert, so dass $|f(x)| \leq \epsilon |g(x)|$ für alle $x \in (R, \infty)$ gilt. Falls $0 \notin \mathrm{Im}(g|_{(b,\infty)})$ für ein $b \in \mathbb{R}_{>a}$ gilt, so ist dies äquivalent zu $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x > b}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

b. Es gilt $f(x) = O(g(x))$ für $x \longrightarrow \infty$, falls Konstanten $K \in \mathbb{R}_{>0}$ und $R \in \mathbb{R}_{>a}$ existieren, so dass $|f(x)| \leq K|g(x)|$ für alle $x \in (R, \infty)$ gilt. Falls $0 \notin \mathrm{Im}(g|_{(b,\infty)})$ für ein $b \in \mathbb{R}_{>a}$ gilt, so ist dies äquivalent zu $\limsup\limits_{\substack{x \to \infty \\ x > b}} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$.

Analog werden die Landau-Symbole für Grenzübergänge für $x \longrightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ definiert.

3.1.6 Lemma

Sei

$$f : \mathbb{R}_{>0} \longmapsto \mathbb{R},\ x \longmapsto \sum_{p \leq x} \frac{\ln(p)}{p}.$$

Dann gilt $f(x) = \ln(x) + O(1)$ für $x \longrightarrow \infty$. Außerdem existieren $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$ax \leq \theta(x) \leq bx$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 2}$ gilt.
Beweis: Siehe unten. ■

Bevor diese beiden Aussagen bewiesen werden, soll eine Folgerung aus den beiden vorherigen Lemmata bewiesen werden:

3.1.7 Korollar

Es existieren $c, d \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $c\frac{x}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq d\frac{x}{\ln(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 2}$ gilt.
Beweis: Wegen $\pi(x) \sim \frac{\theta(x)}{\ln(x)}$ für $x \longrightarrow \infty$ gilt $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)\pi(x)}{\theta(x)} = 1$. Also existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\left|\frac{\theta(x)}{\ln(x)\pi(x)} - 1\right| < \frac{1}{2}$ für alle $x \in (\frac{1}{\delta}, \infty)$ gilt. Damit gilt für alle $x \in (\frac{1}{\delta}, \infty)$ mit $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ nach 3.1.5 gewählt:

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{x}{\ln(x)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta(x)}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{\theta(x)}{\ln(x)} \leq \frac{3b}{2} \cdot \frac{x}{\ln(x)}.$$

Ferner ist die Abbildung $f : [2, \delta^{-1}] \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \longmapsto \frac{x}{\ln(x)}$ stetig und somit existieren $M_1 := \max\limits_{x \in [2,\delta^{-1}]} f(x)$ und $M_1 := \min\limits_{x \in [2,\delta^{-1}]} f(x)$. Damit folgt für alle $x \in [2, \delta^{-1}]$:

$$\frac{1}{M_1} \cdot \frac{x}{\ln(x)} \leq 1 = \pi(2) \leq \pi(x) \leq \pi\left(\lfloor \delta^{-1} \rfloor + 1\right) \leq \frac{\pi(\lfloor \delta^{-1} \rfloor + 1)}{M_2} \cdot \frac{x}{\ln(x)}.$$

Dann erfüllen $c := \min\{\frac{1}{M_1}, \frac{a}{2}\}$ und $d := \max\{\frac{3b}{2}, \frac{\pi(\lfloor \delta^{-1} \rfloor + 1)}{M_2}\}$ die Behauptung. ■

Beweis von Lemma 3.1.6:
Der Beweis des ersten Teils der Behauptung erfolgt in vier Schritten, und zwar:

a. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $e(p) := \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid p^k | (n!)\}$ für alle $p \in \mathbb{P}$. Dann gilt $n! = \prod\limits_{p \leq n} p^{e(p)}$ (Primfaktorzerlegung[18]). Ferner gilt $|\{m \in \underline{n} \mid p^k | m\}| = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ für alle $k \in \mathbb{N}$, denn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

[18] Da $n! = \prod\limits_{k=1}^{n} k$ gilt, sind alle Primzahlen in der Faktorisierung von $n!$ kleiner oder gleich n, denn jede dieser Primzahlen muss einen Faktor aus dem Produkt $\prod\limits_{k=1}^{n} k$ teilen.

$\{m \in \underline{n} \mid p^k | m\} = ([0, \frac{n}{p^k}] \cap \mathbb{N}) \cdot p^k$. Also gilt

$$e(p) = \sum_{k=1}^{\infty} |\{m \in \underline{n} \mid p^k | m\}| = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

für alle $p \in \mathbb{P}$ mit $p \leq n!$, wobei die Summe wegen $\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor = 0$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $p^k > n$ endlich ist. Wegen der Endlichkeit der Summe folgt damit

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \ln\big(\prod_{p \leq n} p^{e(p)}\big) = \sum_{p \leq n} e(p)\ln(p) = \sum_{p \leq n} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \ln(p)\Big) \\ &= \sum_{p \leq n} \Big(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \ln(p)\Big) + \sum_{p \leq n} \Big(\sum_{k=2}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \ln(p)\Big). \end{aligned}$$

Dabei gilt für alle $p \in \mathbb{P}$ mit $p \leq n$:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{n}{p^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{n}{p(p-1)}.$$

Es folgt daher

$$\sum_{p \leq n} \Big(\sum_{k=2}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \ln(p)\Big) \leq \sum_{p \leq n} \frac{n\ln(p)}{p(p-1)} \leq n \cdot \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} = O(n),$$

für $n \longrightarrow \infty$, denn:

Für alle $k \in \mathbb{N}_{>2}$ gilt $0 < \frac{k-2}{k^2(k-1)} = \frac{2}{k^2} - \frac{1}{k(k-1)}$. Da $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ dann $\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}} < 1$ gilt. Da die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$ konvergiert. folgt wegen

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k(k-1)} \leq 2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2} \leq 2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{1,5}} < \infty$$

die Konvergenz von $\sum\limits_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}$. Somit folgt die Behauptung nach Definition des Landausymbols O.

Ferner gilt nach der stirlingschen Formel (vergleiche 2.2.7)

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \ln\Big((1 + o(1))\big(\frac{n}{e}\big)^n \sqrt{2\pi n}\Big) \\ &= n\ln\big(\frac{n}{e}\big) + \frac{\ln(2\pi n)}{2} + o(1) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + O(1) \\ &= n\ln(n) + O(n). \end{aligned}$$

für $n \longrightarrow \infty$. Insgesamt gilt also

$$\sum_{p \leq n} \Big(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \ln(p)\Big) = n\ln(n) + O(n) \tag{11}$$

für $n \longrightarrow \infty$ wegen $\sum\limits_{p \leq n} \Big(\sum\limits_{k=2}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor \ln(p)\Big) \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b. Mit Gleichung (11)

$$\begin{aligned} &\sum_{p \leq 2n} \Big(\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor\Big)\ln(p) = \sum_{p \leq 2n} \Big(\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor \ln(p)\Big) - 2 \cdot \sum_{p \leq n} \Big(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \ln(p)\Big) \\ &= 2n\ln(2n) + O(n) - 2n\ln(n) + O(n) = 4n\ln(n) + O(n) = O(n). \end{aligned}$$

für $n \longrightarrow \infty$. Ferner gilt

$$\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0, x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und somit insbesondere $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 1$ für alle $x \in [\frac{1}{2}, 1)$. Also gilt

$$\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $p \in \mathbb{P} \cap (n, 2n]$ wegen $p \neq 2n$. Dies liefert dann

$$\sum_{p \leq 2n} \left(\lfloor \frac{2n}{p} \rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p} \rfloor \right) \ln(p) \geq \sum_{p \in (n, 2n]} \ln(p) = \theta(2n) - \theta(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt insgesamt

$$\theta(2n) - \theta(n) = O(n). \tag{12}$$

für $n \longrightarrow \infty$.

c. Für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ gilt $|\mathbb{P} \cap (2\lfloor x \rfloor, \lfloor 2x \rfloor)| \leq 1$ wegen $\mathbb{N} \cap (2\lfloor x \rfloor, \lfloor 2x \rfloor) \subseteq \{2\lfloor x \rfloor + 1\}$. Somit folgt, dass

$$\theta(2x) - \theta(2\lfloor x \rfloor) = \sum_{2\lfloor x \rfloor < p \leq 2x} \ln(p) = \ln(2x) = \ln(2) + \ln(x) \leq (1 + \ln(2))x = O(x)$$

für $x \longrightarrow \infty$ sowie

$$\theta(x) - \theta(\lfloor x \rfloor) \leq \ln(x) = O(x).$$

für $x \longrightarrow \infty$ gilt. Damit folgt mit Gleichung (12), dass

$$\theta(2x) - \theta(x) = -\theta(2\lfloor x \rfloor) + \theta(\lfloor x \rfloor) + O(x) = O(x)$$

für $x \longrightarrow \infty$ gilt. Also existieren $\epsilon, \widetilde{K} \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq \epsilon}$ dann $\theta(2x) - \theta(x) \leq \widetilde{K}x$ gilt, da θ monoton steigen ist. Wegen $\theta|_{(0,\epsilon)} \leq \theta(\epsilon)$ und wegen $\mathrm{Im}(\theta) \subseteq \mathbb{R}_{\leq 0}$ existiert somit $\in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\theta(2x) - \theta(x) \leq Kx$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \theta(x) - \theta(2^{-1}x) + \theta(2^{-1}x) \leq Kx + \theta(2^{-1}x) - \theta(2^{-2}x) + \theta(2^{-2}x) \\ &\leq Kx + \frac{Kx}{2} + \theta(2^{-2}x) \end{aligned}$$

und somit induktiv

$$\theta(x) \leq Kx \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} + \theta(2^{-n}x) \leq Kx \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \theta(2^{-n}x) = 2Kx + \theta(2^{-n}x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ sei nun $k_x \in \mathbb{N}$ mit $\frac{x}{2^{k_x}} < 2$ minimal gewählt. Dann folgt wegen $\theta(x) = 0$ für alle $x \in (0, 2)$ damit

$$\theta(x) = O(x) \tag{13}$$

für $x \longrightarrow \infty$.

d. Mit Gleichung (11) folgt nun

$$\begin{aligned} 0 \leq nf(n) = n \cdot \sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p} &\leq \sum_{p \leq n} \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 \right) \ln(p) \leq \theta(n) + \sum_{p \leq n} \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \ln(p) \right) \\ &= \theta(n) + n\ln(n) + O(n) = n\ln(n) + O(n) \end{aligned}$$

für alle $n \longrightarrow \infty$.

Da zwischen zwei natürlichen Zahlen keine Primzahl liegt, gilt $f(x) = f(n)$ für alle $x \in [n, n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und somit folgt der erste Teil der Behauptung.

Es verbleibt, die Existenz einer oberen und unteren Schranke für $\theta(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 2}$ zu zeigen. Mit Gleichung (13) und mit der Monotonie von θ folgt die Existenz der oberen Schranke für $\theta|_{\mathbb{R}_{\geq 2}}$. Ferner existiert auch die untere Schranke, denn es gilt:

Da $f(x) = \ln(x) + O(1)$ für $x \longrightarrow \infty$ gilt, existieren Konstanten $K, R \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$\big|f(x) - \ln(x)\big| \leq K$$

für alle $x \in (R, \infty)$ gilt. Damit folgt für alle $\alpha \in (0,1)$ und für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x > \frac{R}{\alpha} > R$, dass

$$\begin{aligned} &\big|f(x) - f(\alpha x) - \ln(\alpha^{-1})\big| = \big|f(x) - f(\alpha x) - \big(\ln(x) - \ln(\alpha x)\big)\big| \\ = &\big|f(x) - \ln(x) - f(\alpha x) + \ln(\alpha x)\big| \leq \big|f(x) - \ln(x)\big| + \big|f(\alpha x) + \ln(\alpha x)\big| \leq 2K \end{aligned} \tag{14}$$

gilt. Sei nun $\alpha \in (0,1)$ derart gewählt, dass $\ln(\alpha^{-1}) - 2K > 1$ gilt, und sei

$$f_\alpha : \mathbb{R}_{>0} \longmapsto \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) - f(\alpha x).$$

Dann folgt mit Gleichung (14), dass

$$f_\alpha(x) \in \big(\ln(\alpha^{-1} - 2K\,,\, \ln(\alpha^{-1} + 2K\big) \subseteq \mathbb{R}_{>1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>\alpha^{-1}R}$ gilt.

Andererseits gilt

$$f_\alpha(x) = \sum_{\alpha x < p \leq x} \frac{\ln(p)}{p} \leq \frac{1}{\alpha x} \sum_{\alpha x < p \leq x} \ln(p) \leq \frac{\theta(x)}{\alpha x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Somit folgt $\alpha x \leq \theta(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>\alpha^{-1}R}$ und mit der Beschränktheit von θ auf $(0, \alpha^{-1}R]$ folgt insgesamt die Behauptung. ∎

Beweis von Lemma 3.1.5:

Es gilt

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln(p) \leq \sum_{p \leq x} \ln(x) = \ln(x) \cdot \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) \ln(x)$$

und somit $\frac{\pi(x)\ln(x)}{\theta(x)} \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 2}$. Ferner gilt für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$:

Es gilt

$$\begin{aligned} \theta(x) &\geq \sum_{x^{1-\epsilon} < p \leq x} \ln(p) \geq \sum_{x^{1-\epsilon} < p \leq x} \ln(x^{1-\epsilon}) = (1-\epsilon) \cdot \sum_{x^{1-\epsilon} < p \leq x} \ln(x) \\ &= (1-\epsilon) \cdot \ln(x) \cdot \big(\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})\big) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gewählt nach Lemma 3.1.6. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}_{>2}$

$$\begin{aligned} \pi(x) &\leq \frac{1}{1-\epsilon} \cdot \frac{\theta(x)}{\ln(x)} + \pi(x^{1-\epsilon}) \leq \frac{1}{1-\epsilon} \cdot \frac{\theta(x)}{\ln(x)} + \lfloor x^{1-\epsilon} \rfloor \leq \frac{1}{1-\epsilon} \cdot \frac{\theta(x)}{\ln(x)} + x^{1-\epsilon} \\ &\leq \frac{1}{1-\epsilon} \cdot \frac{\theta(x)}{\ln(x)} + \frac{1}{a} \frac{\theta(x)}{x^\epsilon} \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{\pi(x)\ln(x)}{\theta(x)} \leq \frac{1}{1-\epsilon} + \frac{1}{a} \frac{\ln(x)}{x^\epsilon}.$$

Wegen $\lim\limits_{y \to \infty} y^{-\epsilon} \ln(y) = 0$ gilt somit

$$1 \leq \frac{\pi(x)\ln(x)}{\theta(x)} \leq \frac{1}{1-\epsilon} + \epsilon, \tag{15}$$

falls $x \in \mathbb{R}_{>2}$ groß genug ist.

Damit gilt für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$:

Wegen $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{2y-y^2}{1-y} = 0$ existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\frac{2\delta-\delta^2}{1-\delta} < \epsilon$. Dann existiert nach Obigen ein $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq 2}$, so dass

$$\frac{\pi(x)\ln(x)}{\theta(x)} \leq \frac{1}{1-\delta} + \delta$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>x_0}$ gilt. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}_{>x_0}$:

$$\Big|\frac{\pi(x)\ln(x)}{\theta(x)} - 1\Big| = \frac{\pi(x)\ln(x)}{\theta(x)} - 1 \leq \frac{1}{1-\delta} + \delta - 1 = \frac{2\delta-\delta^2}{1-\delta} < \epsilon.$$

Also folgt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{\theta(x)} = 1$ und somit gilt $\pi(x) \sim \frac{\theta(x)}{\ln(x)}$ für $x \longrightarrow \infty$. ■

Ein wesentliches Hilfsmittel bei der Untersuchung der Primzahlen und insbesondere auch beim Beweis des Primzahlensatzes ist die im Folgenden definierte riemannsche Zetafunktion. Zunächst jedoch eine Erinnerung:

Erinnerung
Für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und für alle $z \in \mathbb{C}$ sei $a^z := \exp(\ln(a)z)$. Die Funktion $f_a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto a^z$ ist für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ganz. Ferner gilt für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$|a^z| = \exp\big(\ln(a)\ \mathrm{Re}(z)\big) \cdot \big|\exp\big(i\ln(a)\ \mathrm{Im}(z)\big)\big| = a^{\mathrm{Re}(z)}.$$

Notation
Für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $H_t := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > t\}$.

3.1.8 Definition / Satz

Die Funktion $\zeta : H_1 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ heißt riemannsche Zetafunktion und ist holomorph.

Beweis: Sei $\zeta_N : H_1 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^z}$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\zeta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen. Dabei gilt für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$:

Es gilt

$$\Big|\frac{1}{n^z}\Big| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}} \leq \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$$

für alle $z \in H_{1+\epsilon}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt für alle $z \in H_{1+\epsilon}$ und für alle $N \in \mathbb{N}$:

$$|\zeta_N(z) - \zeta(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \Big|\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\Big| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}.$$

Da $1+\epsilon > 1$ gilt, konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ absolut und somit konvergiert $(\zeta_N|_{H_{1+\epsilon}})_{N\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\zeta|_{H_{1+\epsilon}}$.

Wegen $H_1 = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_{1+\frac{1}{n}}$ folgt nach dem Satz von Weierstraß, dass ζ holomorph ist. ■

3.1.9 Satz

Sei $\eta : H_1 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \zeta(z) - \frac{1}{z-1}$. Dann besitzt η eine holomorphe Fortsetzung auf H_0.

Beweis: Es gilt für alle $z \in H_1$:

Wegen $\mathrm{Re}(z) > 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |n^{1-z}| = \lim\limits_{n\to\infty} n^{1-\mathrm{Re}(z)} = 0$ und daher gilt

$$\int\limits_{1+\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{x^z}\,dx = \Big[\frac{x^{1-z}}{1-z}\Big]_{1+\frac{1}{n}}^{n} = \frac{1}{1-z}\big(n^{1-z} - (1+n^{-1})^{1-z}\big).$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^z}\, dx = \frac{1}{z-1}$ und somit folgt

$$\eta(z) = \zeta(z) - \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} - \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^z}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{1}{n^z} - \int\limits_n^{n+1} \frac{1}{x^z}\, dx\Big) = \sum_{n=1}^\infty \int\limits_n^{n+1} \Big(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z}\Big)\, dx.$$

Da $f_z : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto t^{-z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ holomorph ist, gilt außerdem

$$\Big|\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z}\Big| = \Big|\int\limits_n^x (\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \frac{1}{t^z})\, ds\Big| = \Big|\int\limits_n^x \frac{-z}{t^{z+1}}\, dt\Big| \leq \int\limits_n^x \Big|\frac{z}{t^{z+1}}\Big|\, dt \leq (x-n) \max_{t\,\in\,[n,x]} \Big|\frac{z}{t^{z+1}}\Big|$$
$$= (x-n)|z| \max_{t\,\in\,[n,x]} t^{-\mathrm{Re}(z)-1} = \frac{(x-n)|z|}{n^{\mathrm{Re}(z)+1}} \leq \frac{|z|}{n^{\mathrm{Re}(z)+1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, für alle $x \in [n, n+1]$ und für alle $z \in H_0$ und somit folgt, dass

$$\Big|\int\limits_n^{n+1} (\frac{1}{n^z} - \frac{1}{t^z})\, dt\Big| \leq \frac{|z|}{n^{\mathrm{Re}(z)+1}} \leq \frac{|z|}{n^{1+\epsilon}}$$

für alle $z \in H_{1+\epsilon}$ und für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt. Damit konvergiert die Folge $(\eta_N)_{N\,\in\,\mathbb{N}}$ mit

$$\eta_N : H_0 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum_{n=1}^N \int\limits_n^{n+1} (\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z})\, dx$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ lokal gleichmäßig auf H_0 gegen eine Funktion $\eta^* : H_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\eta^*\big|_{H_1} = \eta$. Da η_N für alle $N \in \mathbb{N}$ holomorph ist, ist auch η^* nach dem Satz von Weierstraß holomorph. ■

Bemerkungen:

1. Tatsächlich ist η auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzbar (vergleiche 3.2.1).

2. Mit der voherigen Bemerkung ist ζ holomorph auf $H_0\backslash\{1\}$ fortsetzbar und besitzt wegen

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\zeta(z) = \lim_{z\to 1}((z-1)\eta(z) + 1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\eta(z) + 1 = 1$$

   einen einfachen Pol in 1.

Konvention

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorph. Sei ferner $H \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $G \subseteq H$, so dass f nach H holomorph fortsetzbar ist. Dann sei die holomorphe Fortsetzung von f nach H wieder mit f bezeichnet.

Dieser Konvention folgend sei nun im Folgenden mit ζ die entsprechende holomorphe Fortsetzung der in 3.1.8 definierten Funktion ζ auf $H_0\backslash\{1\}$ gemeint.
Der Zusammenhang zwischen der riemannschen Zetafunktion ζ und den Primzahlen wird durch folgenden Satz deutlich:

3.1.10 Satz

Für alle $z \in H_1$ gilt $\zeta(z) = \prod\limits_{p\,\in\,\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-z}}$.

Beweis: Es gilt für alle $z \in H_1$:

Wegen $\mathrm{Re}(z) > 1$ konvergiert $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{p_k^z}$ absolut, da $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}$ eine absolut konvergente Majorante ist. Damit ist $\prod\limits_{k=1}^\infty (1 - \frac{1}{p^z})$ ebenfalls absolut konvergent nach 1.2.5 und somit konvergent nach 1.2.4. das uneigentliche Produkt $\prod\limits_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-z}}$. Dabei ist die Reihenfolge der Multiplikation bei der Berechnung von $\prod\limits_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-z}}$ wegen $\Big(\prod\limits_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-z}}\Big)^{-1} = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-p^{-z})$ und wegen der absoluten Konvergenz des rechten unendlichen Produktes irrelevant.

Sei $M_N := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists_{\,k \in \mathbb{N}} \exists_{\,\alpha_1,\ldots,\alpha_N \in \mathbb{N}_0} (\prod\limits_{k=1}^{N} p_k^{\alpha_k} = n)\}$ für alle $N \in \mathbb{N}$.[19] Dann gilt

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-p^{-z}} = \sum_{n \in M_N} \frac{1}{n^z}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ und für alle $z \in H_1$, denn per Induktion folgt für alle $z \in H_1$:

<u>IA:</u> Es gilt

$$\prod_{n=1}^{2} \frac{1}{1-p_n^{-z}} = \prod_{n=1}^{2} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^{mz}}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{mz} p_2^{(n-m)z}}\Big),$$

mit der Cauchy-Produktformel, wobei

$$\big\{(p_1^k p_2^{(n-m)})^{-z} \,\big|\, m \in \underline{n}_0, n \in \mathbb{N}_0\big\} = \big\{(p_1^k p_2^l)^{-z} \,\big|\, k, l \in \mathbb{N}_0\big\} = \big\{n^{-z} \,\big|\, n \in M_2\big\}$$

gilt. Damit folgt mit der absoluten Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{mz} p_2^{(n-m)z}}\Big)$$

die Behauptung für $N = 2$, da die Reihenfolge der Summation ohne Änderung des Reihenwertes vertauscht werden kann.

<u>IS:</u> Der Induktionsschritt erfolgt analog zur Beweisführung beim Induktionsanfang.

Da $\frac{1}{1-p^{-z}} \neq 0$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und für alle $z \in H_1$ gilt, folgt somit

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-p^{-z}} = \lim_{N \to \infty} \Big(\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-p^{-z}}\Big) = \lim_{N \to \infty} \Big(\sum_{n \in M_N} \frac{1}{n^z}\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^z} = \zeta(z)$$

für alle $z \in H_1$. ■

3.1.11 Korollar

Für alle $z \in H_1$ gilt $\zeta(z) \neq 0$.
Beweis: Folgt sofort mit 3.1.10, da $\frac{1}{1-p^{-z}} \neq 0$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und für alle $z \in H_1$ gilt. ■

Eines der berühmtesten ungelösten Probleme der Mathematik ist das Folgende:

Riemannsche Vermutung
Für alle $z \in H_0$ mit $\zeta(z) = 0$ gilt $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$.

Dabei heißt $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto \frac{1}{2} + it$ die kritische Gerade. Damit besagt die obige Vermutung, dass $\{z \in H_0 \,|\, \zeta(z) = 0\} \subseteq$ G gilt. Ein Beweis der riemannschen Vermutung würde sehr gute Abschätzungen des Fehlerverhaltens im Primzahlensatz liefern. Genauer: Das Restglied würde

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\, dt + R(x)$$

[19] M_N ist also die Menge aller natürlichen Zahlen, für deren Primfaktorzerlegung nur Primzahlen aus $\{p_1, \ldots, p_n\}$ benötigt werden.

mit $|R(x)| \leq x^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ für $x \longrightarrow \infty$ und für $\epsilon \longrightarrow 0$ erfüllen (vergleiche dazu Abschnitt 3.2).

Für den Beweis des Primzahlensatz in dessen hier angegebener Form reicht jedoch eine schwächere Aussage:

3.1.12 Satz

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) = 1$ gilt $\zeta(z) \neq 0$.
Beweis: Siehe S. 36. ∎

Für den Beweis dieses Satzes wie auch im weiteren Beweis des Primzahlensatzes ist es günstig, eine weitere Funktionen zu betrachten, die an die in Lemma 3.1.6 betrachtete Summe erinnert:

3.1.13 Definition / Satz

Sei $\phi : H_1 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum\limits_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^z}$. Dann ist ϕ holomorph, wobei die Reihe lokal gleichmäßig auf H_1 konvergiert.

Beweis: Sei $\phi_N : H_1 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{\ln(p_k)}{p_k^z}$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\phi_N)_{N \in \mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen. Dabei gilt für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$:

Wegen $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\ln(p_k) \leq p_k^{\frac{\epsilon}{2}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ gilt. Damit gilt

$$\left|\frac{\ln(p_k)}{p_k^z}\right| = \frac{\ln(p_k)}{p_k^{\mathrm{Re}(z)}} \leq \frac{\ln(p_k)}{p_k^{1+\epsilon}} \leq p_k^{1+\frac{\epsilon}{2}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ und für alle $z \in H_{1+\epsilon}$

Analog zu 3.1.8 folgt damit die Behauptung. ∎

Erinnerung[20]

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $\big(f_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen von G nach $\mathbb{C}$. Falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ absolut (lokal) gleichmäßig konvergiert, so heißt $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + f_n)$ absolut (lokal) gleichmäßig konvergent. In diesem Fall ist $f : G \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$ eine wohldefinierte holomorphe Funktion.

3.1.14 Lemma

Für alle $z \in H_1$ gilt

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \phi(z) + \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^z(p^z - 1)},$$

wobei die rechte Reihe sogar lokal gleichmäßig auf $H_{\frac{1}{2}}$ konvergiert.

Beweis: Zuerst sollen zwei für den Beweis der Behauptung notwendige Hilfsaussagen bewiesen werden:

Hilfsaussage: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $\big(f_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher, nullstellenfreier Funktionen von G nach $\mathbb{C}$. Sei ferner $F_n := \prod\limits_{k=1}^{n} f_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie sei $F := \prod\limits_{k=1}^{\infty} f_k$. Dann gilt:

a. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{F_n'}{F_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k}$.

b. Konvergiert das unendliche Produkt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ absolut lokal gleichmäßig, so gilt $\frac{F'}{F} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{f_k'}{f_k}$.

Beweis:

a. Die erste Aussage folgt sofort aus der Quotientenregel mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

[20] Vergleiche Fischer, Funktionentheorie, S.195 und S.196.

b. Da $\prod\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ absolut lokal gleichmäßig konvergiert, ist F nach obiger Erinnerung holomorph und $\big(F_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen F. Damit konvergiert $\big(F_n'\big)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen F' nach dem Satz von Weierstraß. Damit folgt

$$\frac{F'}{F}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n'}{F_n}(z) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k}(z)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k'}{f_k}(z)$$

für alle $z \in G$ mit den Limesrechenregeln und der erste Aussage. ∎

Sei $f_k : H_1 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto p_k^{-z}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$:
Für alle $z \in H_{1+\epsilon}$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_k(z)| = \frac{1}{p_k^{\mathrm{Re}(z)}} \leq \frac{1}{p_k^{1+\epsilon}}.$$

Also konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ absolut gleichmäßig auf $H_{1+\epsilon}$.

Damit konvergiert nach obiger Erinnerung $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-f_k)$ absolut lokal gleichmäßig und mit Satz 3.1.10 sowie mit der obigen Hilfsaussage gilt für alle $z \in H_1$

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{\big(\frac{1}{\zeta}\big)'(z)}{\big(\frac{1}{\zeta}\big)(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-f_k'(z)}{(1-f_k)(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(p_k)p_k^{-z}}{1-p_k^{-z}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(p_k)}{p_k^z - 1}$$

und somit dann

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - \phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\ln(p_k)\Big(\frac{1}{p_k^z-1} - \frac{1}{p_k^z}\Big)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(p_k)}{p_k^z(p_k^z-1)}.$$

Außerdem gilt für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und für alle $z \in H_{\frac{1}{2}+\epsilon}$:
Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\ln(p_k) \leq p_k^{\frac{\epsilon}{2}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ gilt. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^{\frac{\epsilon}{2}}} = 0$ gilt, gelte o.B.d.A. $2 < p_k^{\frac{\epsilon}{2}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$. Damit gilt insbesondere $p_k^{-\frac{\epsilon}{2}} < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$. Somit gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$

$$p_k^{\frac{1}{2}+\epsilon} > 2p_k^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}} > p_k^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}} + 1$$

und somit

$$\Big|\frac{\ln(p_k)}{p_k^z(p_k^z-1)}\Big| \leq \frac{\ln(p_k)}{p_k^{\mathrm{Re}(z)}(|p_k|^z-1)} \leq \frac{\ln(p_k)}{p_k^{\mathrm{Re}(z)}(p_k^{\mathrm{Re}(z)}-1)} \leq \frac{\ln(p_k)}{p_k^{\frac{1}{2}+\epsilon}(p_k^{\frac{1}{2}+\epsilon}-1)}$$
$$< \frac{p_k^{\frac{\epsilon}{2}}}{p_k^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \cdot p_k^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}}} = \frac{1}{p_k^{1+\frac{\epsilon}{2}}}.$$

Damit konvergiert die Folge $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : H_{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(p_k)}{p_k^z(p_k^z-1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ lokal gleichmäßig gegen die Funktion $f_n : H_{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(p_k)}{p_k^z(p_k^z-1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(p_k)}{p_k^z(p_k^z-1)}$ für alle $z \in H_{\frac{1}{2}}$ absolut und damit konvergiert auch jede Umorndnung dieser Reihe gegen denselben Wert, das heißt, für alle $z \in H_{\frac{1}{2}}$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(p_k)}{p_k^z(p_k^z-1)} = \sum\limits_{p\in\mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^z(p^z-1)}$. ∎

Nach 3.1.9 besitzt $\eta : H_1 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ eine holomorphe Fortsetzung auf H_0 und somit ist die riemannsche Zetafunktion ζ meromorph auf H_0 derart fortsetzbar, dass die Fortsetzung einen einfachen Pol in 1 besitzt, und dass $\zeta\big|_{H_0\backslash\{0\}}$ holomorph ist. Dabei gilt ferner $\lim\limits_{z\to 1}(z-1)\zeta(z) = 1$. Damit ist die Funktion

$$g : H_0 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \begin{cases}(z-1)\zeta(z), \text{ falls } z \in H_0\backslash\{0\}\\ \qquad 1 \text{ sonst}\end{cases}$$

nach dem riemannschen Hebbarkeitssatz holomorph, da diese Funktion stetig in 1 ist. Damit folgt

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{(z-1)\zeta'(z)}{(z-1)\zeta(z)} = \frac{g'(z)-\zeta(z)}{(z-1)\zeta(z)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

für alle $z \in H_0\backslash(\zeta^{-1}(0) \cup \{1\})$, wobei nach 3.1.11 $H_1 \subseteq H_0\backslash(\zeta^{-1}(0) \cup \{1\})$ gilt. Ferner gilt mit 3.1.14

$$\phi(z) - \frac{1}{z-1} = -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^z(p^z-1)} - \frac{1}{z-1} = -\frac{g'(z)}{g(z)} - \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^z(p^z-1)} \tag{16}$$

für alle $z \in H_1$. Damit folgt:

3.1.15 Lemma

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) = 1$ gilt $\zeta(z) \neq 0$ genau dann, wenn die holomorphe Funktionen

$$f : H_1 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \phi(z) - \frac{1}{z-1}$$

eine holomorphe Fortsetzung auf ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ mit $\overline{H_1} \subseteq G$ besitzt.

Beweis: Sei die Funktion g definiert wie oben.

“$\Rightarrow$„ Es gelte $\zeta(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) = 1$. Sei $G := H_0\backslash(\zeta^{-1}(0) \cup \{1\})$. Dann gilt $\overline{H_1} \subseteq G$ nach Implikationsannahme und mit 3.1.11. Sei ferner g definiert wie auf der vorherigen Seite und sei

$$h : G \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Dann ist h eine wohldefinierte, holomorphe Funktion. Nach 3.1.14 ist außerdem die Funktion

$$S : H_{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^z(p^z-1)}$$

holomorph. Mit Gleichung (16) folgt dann, dass f auf $G \cap H_{\frac{1}{2}}$ holomorph fortsetzbar ist.

“$\Leftarrow$„ Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{H_1} \subseteq G$ derart, dass $f : H_1 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \phi(z) - \frac{1}{z-1}$ holomorph auf G fortsetzbar ist. Da

$$S : H_{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^z(p^z-1)}$$

eine holomorphe Funktion ist, gilt für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) = 1$ mit Gleichung (16), dass

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g'(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \big(-S(z) - f(z)\big) = -\lim_{z\to z_0} S(z) - \lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$$

gilt. Also gilt $\zeta(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) = 1$. ■

Es soll nun der Beweis von 3.1.12 nachgetragen werden:

Beweis von Satz 3.1.12:
Angenommen es existiert ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z_1) = 1$, so dass $\zeta(z_1) = 0$ gilt. Da ζ in 1 einen einfachen Pol besitzt, gilt $z_1 \neq 1$. Somit existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $\alpha = \mathrm{Im}(z_1)$.
Da nach 3.1.11 ζ keine Nullstellen besitzt, die in H_1 liegen, ist z_1 eine Nullstelle endlicher Ordnung von ζ.[21] Somit existieren $m \in \mathbb{N}$, eine Umgebung U von z_1 in $H_0\backslash\{1\}$ sowie eine holomorphe Funktion $f_1 : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f_1(z_1) \neq 0$, so dass

$$\zeta(z) = (z - z_1)f_1(z)$$

für alle $z \in U$ gilt, denn:

Wegen $z_1 \neq 1$ existiert ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\overline{B}_r^{\mathbb{C}}(z_1) \subseteq H_0\backslash\{1\}$ gilt. Sei $U := B_r^{\mathbb{C}}(z_1) \subseteq H_0\backslash\{1\}$. Dann ist $\zeta\big|_U$ holomorph und es existiert eine Folge $\big(a_n\big)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, so dass

$$\zeta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_1)^n$$

für alle $z \in U$ gilt. Da die Nullstelle z_1 Ordnung m hat, gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \underline{m-1}_0$ und $a_m \neq 0$. Sei nun

$$f_1 : U \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z - z_1)^{n-m}.$$

Dann hat diese Potenzreihe nach Cauchy-Hadamard denselben Konvergenzradius wie die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_1)^n$, das heißt, der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n(z - z_1)^{n-m}$ ist größer bzw. gleich r. Da Potenzreihen auf jeden Kompaktum ihres Konvergenzkreises gleichmäßig konvergieren, ist f_1 nach dem Satz von Weierstraß holomorph, wobei wegen $a_m \neq 0$ offenbar $f_1(z_1) \neq 0$ gilt.

Ferner gilt $\zeta(z) = (z - z_1)f_1(z)$ für alle $z \in U$ nach Konstruktion von f_1.

Dann gilt mit der Kettenregel

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{m}{z - z_1} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

für alle $z \in U\backslash\{z_1\}$ und somit folgt

$$\lim_{z \to z_1} \big((z - z_1)\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\big) = m + \lim_{z \to z_1} \big((z - z_1)\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\big) = m$$

nach den Limesrechenregeln.
Außerdem gilt $\zeta(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>1}$ und damit gilt $\zeta(\overline{z}) = \overline{\zeta(z)}$ für alle $z \in H_0\backslash\{1\}$ nach dem Identitätssatz. Also ist auch $\overline{z_1}$ eine Nullstelle von ζ der Ordnung m. Damit gilt

$$\lim_{z \to \overline{z_1}} \big((z - \overline{z_1})\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\big) = m$$

analog zu oben. Sei ferner

$$S : H_{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^z(p^z - 1)}.$$

Dann ist S nach 3.1.14 holomorph und somit ist ϕ nach 3.1.14 holomorph auf $G := H_{\frac{1}{2}}\backslash\{1\}$ fortsetzbar. Da $z_1 \in G$ gilt, folgt mit 3.1.14

$$\lim_{\substack{z \to z_1 \\ z \neq z_1}} (z - z_1)\phi(z) = -\lim_{\substack{z \to z_1 \\ z \neq z_1}} \big(\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + S(z)\big) = -m$$

und analog

$$\lim_{\substack{z \to \overline{z_1} \\ z \neq \overline{z_1}}} (z - \overline{z_1})\phi(z) = -m.$$

[21] Vergleiche Fischer, Funktionalanalysis, S.85.

Also gilt insbesondere wegen

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\neq 0}}\big(\epsilon\cdot\phi(1+i\alpha+\epsilon)\big)=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\neq 0}}\big((1+i\alpha+\epsilon-z_1)\phi(1+i\alpha+\epsilon)\big)=-m$$
$$=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\neq 0}}\big((1-i\alpha+\epsilon-\overline{z_1})\phi(1+i\alpha+\epsilon)\big)=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\neq 0}}\big(\epsilon\cdot\phi(1-i\alpha+\epsilon)\big).$$

Sei $z_2 := 1+2i\alpha$. Analog zu oben existieren dann eine holomorphe Funktion $f_2 : V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit V Umgebung von z_2 in $H_0\backslash\{1\}$ und ein $n\in\mathbb{N}_0$, so dass

$$\zeta(z)=(z-z_2)f_2(z)$$

für alle $z\in V$ gilt. Dabei ist $n=0$ möglich, da $\zeta(z_2)\neq 0$ gelten kann. Analog zu oben folgt dann

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\neq 0}}\big(\epsilon\cdot\phi(1+2i\alpha+\epsilon)\big)=-n=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\neq 0}}\big(\epsilon\cdot\phi(1-2i\alpha+\epsilon)\big).$$

Da ζ einen einfachen Pol in 1 besitzt, gilt $\lim\limits_{z\to 1}(z-1)\zeta(z)=1$ (vergleiche die zweite Bemerkung zu 3.1.9). Damit ist ist die Funktion

$$g : H_0 \longrightarrow \mathbb{C},\ z\longmapsto\begin{cases}(z-1)\zeta(z), & \text{falls } z\neq 1\\ 1, & \text{falls } z=1\end{cases}$$

nach dem riemannschen Hebbarkeitssatz holomorph. Also existiert ein $r\in\mathbb{R}_{>0}$, so dass $g(z)\neq 0$ für alle $z\in B:=B_r^{\mathbb{C}}(1)$ gilt. Ferner gilt für alle $z\in B\backslash\{1\}$

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=\frac{(z-1)\zeta'(z)}{(z-1)\zeta(z)}=\frac{g'(z)-\zeta(z)}{(z-1)\zeta(z)}=-\frac{1}{z-1}+\frac{g'(z)}{g(z)}$$

und somit folgt $\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=-\frac{1}{z-1}+O(1)$ für $z\longrightarrow 1$, da $\frac{g'|_B}{g|_B}$ eine wohldefinierte und holomorphe - also insbesondere stetige - Abbildung ist. Daher folgt

$$1=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\neq 0}}\frac{\epsilon}{1+\epsilon-1}=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\neq 0}}\Big(-\epsilon\cdot\frac{\zeta'(1+\epsilon)}{\zeta(1+\epsilon)}\Big)$$

und somit

$$1=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\neq 0}}\Big(-\epsilon\cdot\frac{\zeta'(1+\epsilon)}{\zeta(1+\epsilon)}\Big)+\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\neq 0}}\big(\epsilon S(1+\epsilon)\big)=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\neq 0}}\epsilon\phi(1+\epsilon)$$

mit 3.1.14. Insgesamt folgt aus den obigen Formeln dann

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\neq 0}}\Big(\epsilon\cdot\sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{k+2}\phi(1+\epsilon+ki\alpha)\Big)=-2n+6-8m=-2<0$$

mit den Limesrechenregeln.
Andererseits gilt aber mit der binomischen Formel für alle $p\in\mathbb{P}$

$$\big(p^{\frac{-i\alpha}{2}}+p^{\frac{i\alpha}{2}}\big)^4=\sum_{k=0}^{4}\Big(\binom{4}{k}p^{\frac{-ik\alpha}{2}}\cdot p^{\frac{i(4-k)\alpha}{2}}\Big)=\sum_{k=0}^{4}\Big(\binom{4}{k}p^{i(2-k)\alpha}\Big)=\sum_{k=-2}^{2}\Big(\binom{4}{k+2}p^{-ik\alpha}\Big)$$

und damit gilt für alle für alle $\epsilon\in\mathbb{R}_{>0}$

$$\sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{k+2}\phi(1+\epsilon+ki\alpha)=\sum_{k=-2}^{2}\Big(\binom{4}{k+2}\cdot\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\ln(p)}{p^{1+\epsilon+ki\alpha}}\Big)$$
$$=\sum_{p\in\mathbb{P}}\Big(\frac{\ln(p)}{p^{1+\epsilon}}\cdot\sum_{k=-2}^{2}\Big(\binom{4}{k+2}p^{-ik\alpha}\Big)\Big)=\sum_{p\in\mathbb{P}}\Big(\frac{\ln(p)}{p^{1+\epsilon}}\cdot\big(p^{\frac{-i\alpha}{2}}+p^{\frac{i\alpha}{2}}\big)^4\Big)$$
$$=\sum_{p\in\mathbb{P}}\Big(\frac{\ln(p)}{p^{1+\epsilon}}\cdot\big(2\mathrm{Re}(p^{\frac{i\alpha}{2}})\big)^4\Big)\geq 0.$$

Damit gilt insgesamt

$$0 > \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon \neq 0}} \Big(\epsilon \cdot \sum_{k=-2}^{2} \binom{4}{k+2} \phi(1 + \epsilon + ki\alpha) \Big) \leq 0. \qquad \lightning$$

Also gilt $\zeta(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) = 1$. ■

Für den Beweis des Primzahlensatzes wird nun zuletzt noch die folgende Aussage benötigt, deren Beweis später nachgetragen und dabei in einen Kontext eingeordnet wird.

3.1.16 Definition / Satz

Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte und messbare Funktion. Sei ferner

$$g : H_0 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \int_0^\infty f(t) e^{-zt}\, dt.$$

Dann heißt g die Laplace-Transformierte von f. Falls g eine holomorphe Fortsetzung auf ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ mit $\overline{H_0} \subseteq G$ besitzt, so existiert das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty f(t)\, dt := \lim\limits_{T \to \infty} \Big(\int\limits_0^T f(t)\, dt \Big)$ und es gilt

$$\int_0^\infty f(t)\, dt = g(0) = \lim_{z \to 0} g(z).$$

Beweis: Siehe S. 41. ■

Bemerkungen:

1. Für alle $z \in H_0$ existiert $\int\limits_0^\infty f(t) e^{-zt}\, dt$, denn für $z \in H_0$ gilt:

   Da f beschränkt ist, existiert ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $|f(t)| \leq M$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt. Damit gilt
   $$|f(t) e^{-zt}| \leq M e^{-\mathrm{Re}(z) t}$$
   für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Da $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto M e^{-\mathrm{Re}(z) t}$ integrierbar ist, folgt die Existenz des uneigentliches Integrals $\int\limits_0^\infty f(t) e^{-zt}\, dt$ mit dem Satz von Lebesque über majorisierte Konvergenz[22].

   Also ist g eine wohldefinierte Abbildung und nach dem Holomorphiesatz über parameterabhängige Integrale[23] ist g auf $H_{1+\epsilon}$ für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ holomorph. Somit ist g wegen $H_0 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} H_{1+\frac{1}{n}}$ holomorph.

2. <u>Entscheidende</u> Voraussetzung ist die holomorphe Fortsetzbarkeit von g.

Bevor der Beweis des Primzahlensatzes nun erbracht wird, soll noch einmal an zwei Bezeichnungen erinnert werden: Zum einen sei $\mathbb{P} =: \{p_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ mit $p_k < p_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und zum anderen sei mit Log derjenige Hauptzweig des komplexen Logarithmus bezeichnet, für den $\mathrm{Log}|_{\mathbb{R}_{>0}} = \ln$ gilt.

Beweis des Primzahlensatzes (siehe 3.1.3):
Nach 3.1.5 gilt $\pi(x) \sim \frac{\theta(x)}{\ln(x)}$ für $x \longrightarrow \infty$. Damit ist es ausreichend, $\theta(x) \sim x$ für $x \longrightarrow \infty$ zu zeigen, denn dann folgt

$$1 = \big(\lim_{x \to \infty} \frac{\theta(x)}{x} \big) \cdot \big(\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln(x)}{\theta(x)} \big) = \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln(x)}{x}$$

[22] Vergleiche Königsberger, Analysis 2, S.278.
[23] Vergleiche Königsberger, Analysis 2, S.286.

mit den Limesrechenregeln und somit ist dann der Primzahlensatz bewiesen.
Sei $p_0 := 1$ und sei ferner

$$f_z : H_0 \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto -\frac{1}{t^z}$$

für alle $z \in H_0$. Dann ist für alle $z \in H_0$ die Abbildung f_z wegen $f_z(t) = \exp\big(z\mathrm{Log}(t)\big)$ als Komposition holomorpher Abbildung holomorph. Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $z \in H_0$

$$1 - \frac{1}{p_n^z} = f_z(p_n) - f_z(p_0) = \int\limits_{p_0}^{p_n} f't\ dt = \int\limits_{p_0}^{p_n} \frac{z}{t^{z+1}}\ dt$$

nach Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals bezüglich Stammfunktionen und daher gilt dann

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(p_k)}{p_k^z} &= \sum_{k=1}^{n} \ln(p_k)\Big(-\int\limits_{p_0}^{p_k} \frac{z}{t^{z+1}}\ dt + 1\Big) = \sum_{k=1}^{n} \ln(p_k)\Big(1 - \sum_{l=1}^{n}\Big(\int\limits_{p_{l-1}}^{p_l} \frac{z}{t^{z+1}}\ dt\Big)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(p_k) - z\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{l=1}^{n}\Big(\ln(p_k)\int\limits_{p_{l-1}}^{p_l} \frac{1}{t^{z+1}}\ dt\Big)\Big) \\
&= \theta(p_n) - z\sum_{l=1}^{n}\Big(\sum_{k=l}^{n}\Big(\ln(p_k)\int\limits_{p_{l-1}}^{p_l} \frac{1}{t^{z+1}}\ dt\Big)\Big) \\
&= \theta(p_n) - z\sum_{l=1}^{n}\Big(\int\limits_{p_{l-1}}^{p_l} \frac{1}{t^{z+1}}\ dt \cdot \sum_{k=l}^{n} \ln(p_k)\Big) \\
&= \theta(p_n) - z\sum_{l=1}^{n}\Big(\int\limits_{p_{l-1}}^{p_l} \frac{1}{t^{z+1}}\ dt \cdot \big(\theta(p_n) - \theta(p_{l-1})\big)\Big). \qquad (\Delta)
\end{aligned}$$

Da θ auf dem Intervall $[p_{k-1}, p_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ konstant ist, und da einelementige Mengen Nullmengen sind, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $z \in H_0$

$$\begin{aligned}
(\Delta) &= \theta(p_n) - z\theta(p_n) \cdot \int\limits_{p_0}^{p_n} \frac{1}{t^{z+1}}\ dt + z \cdot \sum_{l=1}^{n}\Big(\int\limits_{p_{l-1}}^{p_l} \frac{\theta(t)}{t^{z+1}}\ dt\Big) \\
&= \theta(p_n) - \theta(p_n)\big(1 - \frac{1}{p_n^z}\big) + z \cdot \int\limits_{p_0}^{p_n} \frac{\theta(t)}{t^{z+1}}\ dt = \frac{\theta(p_n)}{p_n^z} + z \cdot \int\limits_{p_0}^{p_n} \frac{\theta(t)}{t^{z+1}}\ dt.
\end{aligned}$$

Nach 3.1.6 gilt $\theta(x) = O(x)$ für $x \longrightarrow \infty$ mit $\theta\big|_{(0,2)} \equiv 0$. Damit folgt für alle $z \in H_1$:

Sei $b \in \mathbb{R}_{>0}$ gewählt nach 3.1.6. Dann gilt

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \Big|\frac{\theta(p_n)}{p_n^z}\Big| = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta(p_n)}{p_n^{\mathrm{Re}(z)}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{bp_n}{p_n^{\mathrm{Re}(z)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{p_n^{\mathrm{Re}(z)-1}} = 0$$

wegen $\mathrm{Re}(z) > 1$ und damit folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\theta(p_n)}{p_n^z} = 0$.

Also gilt

$$\phi(z) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(p)}{p^z} = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta(p_n)}{p_n^z} + \lim_{n\to\infty}\Big(z \cdot \int\limits_{p_0}^{p_n} \frac{\theta(t)}{t^{z+1}}\ dt\Big) = z \cdot \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\theta(t)}{t^{z+1}}\ dt$$

für alle $z \in H_1$, wobei benutzt wurde, dass die ϕ definierende Reihe absolut konvergent ist, und somit jede Umordnung dieser gegen denselben Grenzwert konvergiert. Ferner existiert das uneigentliche

Integral $\int\limits_1^\infty \frac{\theta(t)}{t^{z+1}}\,dt$ für alle $z \in H_1$, da ϕ eine wohldefinierte Funktion ist, und da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\theta(p_n)}{p_n^z}$ existiert. Damit gilt mit der Substitutionsregel

$$\phi(z) = z \cdot \int\limits_1^\infty \frac{\theta(t)}{t^{z+1}}\,dt = z \cdot \int\limits_0^\infty \frac{\theta(e^s)}{e^{(z+1)s}} \cdot e^s\,ds = z \cdot \int\limits_0^\infty \frac{\theta(e^s)}{e^{sz}}\,ds$$

für alle $z \in H_1$ und ferner gilt

$$\frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{z} - \frac{1}{z\exp(sn)}\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big[-\frac{1}{z\exp(sz)}\Big]_0^n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n e^{-sz}\,ds = \int\limits_0^\infty e^{-sz}\,ds$$

für alle $z \in H_0$. Somit folgt für alle $z \in H_0$, dass

$$\int\limits_0^\infty \Big(\frac{\theta(e^s)}{e^s} - 1\Big)e^{-sz}\,ds = \int\limits_1^\infty \frac{\theta(e^s)}{e^{s(z+1)}}\,ds - \int\limits_0^\infty e^{-sz}\,ds = \frac{\phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z+1}\Big(\phi(z+1) - \frac{1}{z} - 1\Big)$$

gilt. Nach 3.1.15 und 3.1.12 existiert ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ mit $\overline{H_0} \subseteq G$, so dass

$$f : H_1 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \frac{1}{z+1}\Big(\phi(z+1) - \frac{1}{z} - 1\Big)$$

eine holomorphe auf G besitzt. Damit existiert nach 3.1.16 das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\theta(e^s)}{e^s} - 1\,ds$, wobei mit der Substitutionsregel

$$\int\limits_0^\infty \frac{\theta(e^s)}{e^s} - 1\,ds = \int\limits_1^\infty \frac{1}{t}\Big(\frac{\theta(t)}{t} - 1\Big)\,dt = \int\limits_1^\infty \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt$$

folgt. Außerdem gilt für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$:

1. Für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ mit $\theta(x) \geq (1+\epsilon)x$ gilt, da θ monoton steigend ist:

$$\int\limits_x^{(1+\epsilon)x} \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt \geq \int\limits_x^{(1+\epsilon)x} \frac{(1+\epsilon)x - t}{t^2}\,dt = \int\limits_1^{1+\epsilon} \frac{(1+\epsilon)x - xu}{(xu)^2} \cdot x\,du = \int\limits_1^{1+\epsilon} \frac{1+\epsilon-u}{u^2}\,du > 0$$

   Also existiert $\alpha_\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\int\limits_x^{(1+\epsilon)x} (\theta(t)-t)t^{-2}\,dt \geq \alpha_\epsilon > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ mit $\theta(x) \geq (1+\epsilon)x$. Da das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty (\theta(t)-t)t^{-2}\,dt$ konvergiert, ist also $\{x \in \mathbb{R}_{\geq 1} \mid \theta(x) \geq (1+\epsilon)x\}$ beschränkt.

2. Analog ist $\{x \in \mathbb{R}_{\geq 1} \mid \theta(x) \leq (1-\epsilon)x\}$ beschränkt, da für alle x aus dieser Menge analog zu 1. $\int\limits_{(1-\epsilon)x}^{x} (\theta(t)-t)t^{-2}\,dt < 0$ gezeigt werden kann.

Damit existiert für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, so dass $\theta(x) \in \big((1-\epsilon)x, (1+\epsilon)x\big)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq x_0}$ gilt. Insgesamt folgt damit $\theta(x) \sim x$ für $x \longrightarrow \infty$. ■

Damit ist der Primzahlensatz bewiesen. Es ist somit lediglich der Beweis von Satz 3.1.16 nachzutragen:

Beweis von Satz 3.1.16:
Für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$ sei

$$g_T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \int\limits_0^T f(t)e^{-tz}\,dt.$$

Dann ist für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$ die Funktion g_T nach dem Holomorphiesatz über parameterabhängige Integrale für alle $\epsilon \in \mathbb{R}$ auf H_ϵ holomorph (Beweis verläuft analog zum Beweis der Holomorphie von g auf S.38) und somit ist g_T für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$ ganz.
Falls $\lim\limits_{T\to\infty} g_T(0) = g(0)$ gilt, folgt somit nach Konstruktion der Menge $\{g_T \mid T \in \mathbb{R}_{>0}\}$ die Behauptung des Satzes.
Sei ferner $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{H_0} \subseteq G$, so dass g auf G holomorph fortgesetzt werden kann. Außerdem sei für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$

$$h_T : G \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \big(g(z) - g_T(z)\big)e^{Tz}\big(1 + \frac{z^2}{R^2}\big).$$

Damit gilt $h_T(0) = g(0) - g_T(0)$ für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und somit folgt die Behauptung des Satzes, falls $\lim\limits_{T\to\infty} h_T(0) = 0$ gilt. Für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt dabei, da h_T holomorph ist, nach dem allgemeinen Integralsatz von Cauchy[24]

$$h_T(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{h_T(z)}{z}\,dz$$

für alle Integrationswege γ, die ganz in G verlaufen, und die 0 im positiven Sinne umlaufen (das heißt, für die Windungszahl $n(\gamma, 0)$ gilt $n(\gamma, 0) = 1$). Durch eine geeignete Wahl des Integrationsweges mit den eben beschriebenen Eigenschaften soll nun $\lim\limits_{T\to\infty} h_T(0) = 0$ gezeigt werden:
Seien $\delta, R \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\overline{B}^{\mathbb{C}}_R(0) \cap \overline{H}_{-\delta} \subseteq G$. Sei $D := B^{\mathbb{C}}_R(0) \cap H_{-\delta}$ und sei γ derart gewählt, dass $\mathrm{Im}(\gamma) = \partial D$ gilt, und dass 0 im positiven Sinne von γ umlaufen wird. Zur weiteren Untersuchung von $h_T(0)$ mit $T \in \mathbb{R}_{>0}$ sei der Integrationsweg γ aufgespalten in denjenigen Teil, der in H_0 verläuft, und denjenigen, der in $\mathbb{C}\backslash H_0$ verläuft. Diese seien mit γ_+ bzw. γ_- bezeichnet.
Da f beschränkt ist, existiert $M \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ mit $M = \sup_{t\in\mathbb{R}_{\leq 0}} |f(t)|$. Dann folgt für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$:

1. Um für $\Big|\int\limits_{\gamma_+} \frac{h_T(z)}{z}\,dz\Big|$ eine Abschätzung zu erhalten, sei Folgendes bemerkt:

   i) Für alle $x + iy =: z \in H_0$ gilt

   $$\begin{aligned}|g(z) - g_T(z)| &= \Big|\int\limits_T^\infty f(t)e^{-tz}\,dt\Big| \leq \int\limits_T^\infty |f(t)|e^{-tx}\,dt \leq M \cdot \int\limits_T^\infty e^{-tx}\,dt \\ &= M \cdot \lim_{\epsilon\to\infty}\Big(\int\limits_T^\epsilon e^{-tx}\,dt\Big) = M \cdot \lim_{\epsilon\to\infty}\Big[-\frac{e^{-tx}}{x}\Big]_T^\epsilon = \frac{Me^{-Tx}}{x}.\end{aligned}$$

   ii) Für alle $x + iy =: z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$ gilt

   $$\begin{aligned}\Big|\frac{e^{Tz}}{z}\big(1 + \frac{z^2}{R^2}\big)\Big| &= \Big|\frac{e^{Tz}}{z}\big(1 + \frac{z^2}{|z|^2}\big)\Big| = \Big|\frac{e^{Tz}}{z}\big(1 + \frac{z}{\overline{z}}\big)\Big| = e^{Tx}\Big|\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}}\Big| \\ &= e^{Tx}\Big|\frac{\overline{z} + z}{z\overline{z}}\Big| = e^{Tx} \cdot \frac{2x}{R^2}\end{aligned}$$

   für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$.

[24] Vergleiche Skript zur Vorlesung „Analysis IV“, Satz (2.3.6).

Also gilt

$$\begin{aligned}|h_T(z)| &= |g(z) - g_T(z)| \cdot \Big|e^{Tz}\big(1 + \frac{z^2}{R^2}\big)\Big| = |g(z) - g_T(z)| \cdot |z| \cdot \Big|\frac{e^{Tz}}{z}\big(1 + \frac{z^2}{R^2}\big)\Big| \\ &\leq \frac{Me^{-Tx}}{x} \cdot R \cdot e^{Tx} \cdot \frac{2x}{R^2} = \frac{2M}{R}\end{aligned}$$

für alle $x + iy =: z \in H_0$ mit $|z| = R$ und für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\gamma_+} \frac{h_T(z)}{z}\, dz\Big| &= \Big|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{h_T(Re^{it})}{Re^{it}} \cdot iRe^{it}\, dt\Big| \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big|\frac{h_T(Re^{it})}{Re^{it}} \cdot iRe^{it}\Big|\, dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big|h_T(Re^{it})\Big|\, dt \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2M}{R}\, dt = \frac{2\pi M}{R}.\end{aligned}$$

2. Somit verbleibt es, $\Big|\int_{\gamma_-} \frac{h_T(z)}{z}\, dz\Big|$ abzuschätzen. Dazu seien

$$u_T : G \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto g(z)e^{Tz}\big(1 + \frac{z^2}{R^2}\big)$$

sowie

$$v_T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto g_T(z)e^{Tz}\big(1 + \frac{z^2}{R^2}\big),$$

das heißt, für alle $z \in G$ gilt $h_T(z) = u_T(z) - v_T(z)$. Also gilt

$$\int_{\gamma_-} \frac{h_T(z)}{z}\, dz = \int_{\gamma_-} \frac{u_T(z)}{z}\, dz + \int_{\gamma_-} \frac{v_T(z)}{z}\, dz,$$

das heißt, im Folgenden werden zunächst die Integrale auf der rechten Seite der Gleichung separat betrachtet:

i) Da g_T holomorph ist, ist v_T auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph. Damit gilt nach dem allgemeinen Integralsatz von Cauchy

$$\int_{\gamma_-} \frac{v_T(z)}{z}\, dz = \int_{\gamma} \frac{v_T(z)}{z}\, dz$$

für alle Integrationswege γ mit $\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und mit denselben Anfangs- und Endpunkten wie γ_-, die in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ homotop zu γ_- sind. Sei also

$$\gamma : \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\},\ t \longmapsto -Re^{it}.$$

Dann gilt also $\int_{\gamma_-} \frac{v_T(z)}{z}\, dz = \int_{\gamma} \frac{v_T(z)}{z}\, dz$ insbesondere. Ferner gilt für alle $x + ix =: z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) < 0$ und mit $|z| = R$

$$|g_T(z)| \leq M \cdot \int_0^T e^{-tx}\, dt = M\Big(\frac{e^{-Tx}}{|x|} - \frac{1}{|x|}\Big) \leq \frac{Me^{-Tx}}{|x|}$$

und somit

$$\Big|\frac{v_t(z)}{z}\Big| \leq \frac{Me^{-Tx}}{|x|} \cdot e^{Tx} \cdot \frac{2|x|}{R^2} = \frac{2M}{R^2}$$

analog zu oben. Also gilt

$$\Big|\int_{\gamma_-} \frac{v_T(z)}{z}\, dz\Big| = \Big|\int_{\gamma} \frac{v_T(z)}{z}\, dz\Big| \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2M}{R}\, dt = \frac{2\pi M}{R}.$$

ii) Da ∂D kompakt ist, existiert eine Konstante $K \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\Big|\frac{g(z)}{z} \cdot \big(1 + \frac{z^2}{R^2}\big)\Big| \leq K$$

für alle $z \in \partial D$. Damit folgt

$$\Big|\int\limits_{\gamma_-} \frac{u_T(z)}{z}\, dz\Big| \leq \int\limits_{\gamma_-} \Big|\frac{u_T(z)}{z}\Big|\, dz \leq \int\limits_{\gamma_-} K e^{\mathrm{Re}(z)T}\, dz.$$

Da $e^{\mathrm{Re}(z)T} \leq 1$ sowie $\lim\limits_{S\to\infty} e^{\mathrm{Re}(z)S} = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) < 0$ gelten, folgt mit dem Satz von Lebesque über majorisierende Konvergenz, dass

$$\lim_{S\to\infty} \Big(\int\limits_{\gamma_-} \frac{v_S(z)}{z}\, dz\Big) = 0$$

gilt. Also existiert ein $T_R \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\Big|\int\limits_{\gamma_-} \frac{u_S(z)}{z}\, dz\Big| \leq \frac{2\pi}{R}$$

für alle $S \in \mathbb{R}_{>T_R}$.

Damit folgt mit 1. und 2.

$$\begin{aligned}|h_T(0)| &= \Big|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{h_T(z)}{z}\, dz\Big| \leq \frac{1}{2\pi}\Big(\Big|\int\limits_{\gamma_+} \frac{h_T(z)}{z}\, dz\Big| + \Big|\int\limits_{\gamma_-} \frac{u_T(z)}{z}\, dz\Big| + \Big|\int\limits_{\gamma_-} \frac{v_T(z)}{z}\, dz\Big|\Big)\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{2\pi M}{R} + \frac{2\pi}{R} + \frac{2\pi M}{R}\Big) = \frac{2M+1}{R}\end{aligned}$$

für alle $T \in \mathbb{R}_{>T_R}$ mit $T_R \in \mathbb{R}_{>0}$ gewählt nach 2. und somit gilt $\lim\limits_{T\to\infty} |h_T(0)| \leq \frac{2M+1}{R}$.
Da $R \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig gewählt war, folgt mit $R \longrightarrow \infty$ wegen $\overline{H_0} \subseteq G$ die Behauptung. ■

Bemerkungen:

1. Sei $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ und mit Konvergenzradius 1. Der abelsche Grenzwertsatz besagt, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ bei Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ gilt.

   Alfred Tauben zeigte 1897, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existiert, und falls $a_n = o\big(\frac{1}{n}\big)$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt. Die Bedingung $a_n = o\big(\frac{1}{n}\big)$ für $n \longrightarrow \infty$ wurde dabei später von Littlewood zu $a_n = O\big(\frac{1}{n}\big)$ für $n \longrightarrow \infty$ abgeschwächt.
   Weitere Verallgemeinerungen dieses Satzes wurden wurden von Hardey und Littlewood gegeben, auf die auch der Name „tauberscher Satz“ für Resultate dieses Typs zurückgeht. Anstelle von Reihen können auch dabei durch Integrale definierte Funktionen betrachtet werden. Ein tauberscher Satz ist also eine Aussage folgenden Typs:

   > Sei f in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ durch eine Reihe (oder durch ein Integral definiert). Die Funktion f besitze eine stetige (oder holomorphe) Fortsetzung in einem Punkt $z \in \partial G$. Außerdem gelte noch ... .
   > Dann konvergiert der f definierende Ausdruck auch in z.

   Insbesondere ist somit 3.1.16 ein tauberscher Satz.

3.2 Zum Zusammenhang zwischen der Zetafunktion und den Primzahlen

In diesem Paragraphen werden einige Bemerkungen gemacht, in denen der Zusammenhang zwischen der riemannschen Zetafunktion und der Verteilung von den Primzahlen deutlich wird. Ferner wird insbesondere auch die Relevanz der riemannschen Vermutung deutlich.

Ohne Beweis sei zunächst festgehalten:

3.2.1 Satz

Die Funktion η (für Definition siehe 3.1.9) ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzbar.

Bemerkungen:

1. Somit ist die riemannsche Zetafunktion ζ holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ mit einem einfachen Pol in 1 fortsetzbar.

Ferner wird die folgende Aussage benötigt, die als die Formel von Perron bekannt ist.

3.2.2 Satz (Perrons Formel)

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a \neq 1$ und sei $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(z)=c} \frac{a^z}{z}\, dz = \begin{cases} 0, & \text{falls } a \in (0,1) \\ 1, & \text{falls } a \in \mathbb{R}_{>1} \end{cases}.$$

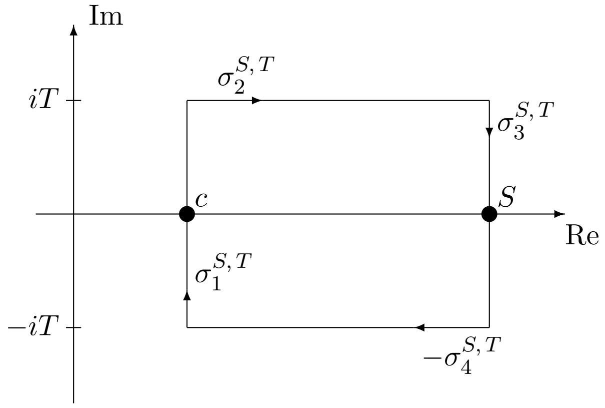
Beweis: Für den Beweis werden zwei Fälle unterschieden:

1. Fall: Sei $a \in (0,1)$. Für alle $S \in \mathbb{R}_{>c} =: I$ und für alle $T \in \mathbb{R}_{>0} =: J$ seien die Abbildungen $\sigma_1^{S,T}, \ldots, \sigma_4^{S,T}$ folgender Maßen definiert:

$$\sigma_1^{S,T} : [-T,T] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto c + it \qquad \sigma_3^{S,T} : [-T,T] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto S - it$$

$$\sigma_2^{S,T} : [c,S] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto c + iT \qquad \sigma_4^{S,T} : [c,S] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto t - iT$$

Sei ferner $\sigma^{S,T} := \sum\limits_{k=1}^{3} \sigma_k^{S,T} - \sigma_4^{S,T}$ für alle $(S,T) \in I \times J$, wobei dieser Integrationsweg in der folgenden Abbildung nochmals skizziert ist:



Für alle $(S,T) \in I \times J$ gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{3} \Big(\int\limits_{\sigma_k^{S,T}} \frac{a^z}{z}\, dz \Big) - \int\limits_{\sigma_4^{S,T}} \frac{a^z}{z}\, dz \Big) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma^{S,T}} \frac{a^z}{z}\, dz = 0,$$

da die Funktion $f : H_0 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto a^z z^{-1}$ holomorph ist. Ferner gilt:

1. Für alle $(S,T) \in I \times J$ gilt

$$\Big| \int\limits_{\sigma_3^{S,T}} \frac{a^z}{z}\, dz \Big| = \Big| \int_{-T}^{T} \frac{-ia^{S-it}}{S-it}\, dt \Big| \leq \int_{-T}^{T} \Big| \frac{-ia^{S-it}}{S-it} \Big|\, dt = \int_{-T}^{T} \frac{a^{\mathrm{Re}(S-it)}}{|S-it|}\, dt \leq \int_{-T}^{T} \frac{a^S}{S}\, dt$$
$$= \frac{2Ta^S}{S}$$

und somit folgt $\lim\limits_{S\to\infty} \Big(\int\limits_{\sigma_3^{S,T}} a^z z^{-1}\, dz \Big) = 0$ für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$ wegen $a \in (0,1)$.

2. Für alle $(S,T) \in I \times J$ gilt

$$\Big| \int\limits_{\sigma_2^{S,T}} \frac{a^z}{z}\, dz \Big| = \Big| \int\limits_c^S \frac{a^{c+iT}}{c+iT}\, dt \Big| \leq \int\limits_c^S \Big| \frac{a^{c+iT}}{c+iT} \Big|\, dt = \int\limits_c^S \frac{a^t}{T}\, dt \overset{a<1}{=} \frac{a^S}{T\ln(a)} + \frac{a^c}{T|\ln(a)|}$$

und somit folgt

$$\lim_{S\to\infty} \Big(\int\limits_{\sigma_2^{S,T}} a^z z^{-1}\, dz \Big) = \frac{a^c}{T|\ln(a)|}$$

für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$. Ferner gilt für alle $(S,T) \in I \times J$ wegen $\frac{a^S}{T\ln(a)} < 0$, dass $\frac{a^c}{T|\ln(a)|}$ eine obere Schranke für $\Big| \int\limits_{\sigma_2^{S,T}} a^z z^{-1}\, dz \Big|$ ist.

3. Ebenso gilt

$$\Big| \int\limits_{\sigma_4^{S,T}} \frac{a^z}{z}\, dz \Big| \leq \frac{a^S}{T\ln(a)} + \frac{a^c}{T|\ln(a)|}$$

für alle $(S,T) \in I \times J$ und somit folgt

$$\lim_{S\to\infty} \int\limits_{\sigma_4^{S,T}} a^z z^{-1}\, dz = \frac{a^c}{T|\ln(a)|}$$

für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$.

Insgesamt gilt damit

$$\lim_{S\to\infty} \Big| \int\limits_{\sigma_1^{S,T}} \frac{a^z}{z}\, dz \Big| \leq \frac{2a^c}{T|\ln(a)|}$$

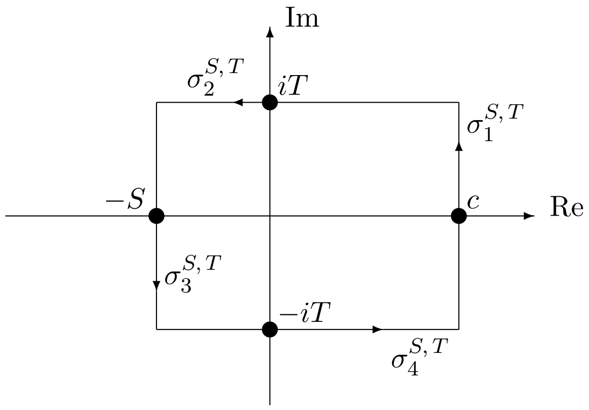
für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$. Damit folgt die Behauptung mit $T \longrightarrow \infty$.

<u>2. Fall:</u> Sei $a \in \mathbb{R}_{>1}$. Für alle $S, T \in \mathbb{R}_{>0} =: I$ seien die Abbildungen $\sigma_1^{S,T}, \ldots, \sigma_4^{S,T}$ folgender Maßen definiert:

$$\sigma_1^{S,T} : [-T,T] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto c+it \qquad \sigma_3^{S,T} : [-T,T] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto -S-it$$

$$\sigma_2^{S,T} : [-S,c] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto t+iT \qquad \sigma_4^{S,T} : [-S,c] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto t-iT$$

Sei ferner $\sigma^{S,T} := \sigma_1^{S,T} - \sigma_2^{S,T} + \sigma_3^{S,T} + \sigma_4^{S,T}$ für alle $(S,T) \in I^2$, wobei dieser Integrationsweg in der folgenden Abbildung nochmals skizziert ist:



Da $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto a^z z^{-1}$ ganz ist, und da für alle $(S,T) \in I^2$ der Integrationsweg $\sigma^{S,T}$ 0 umläuft, folgt mit der cauchyschen Integralformal, dass

$$1 = f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma^{S,T}} \frac{a^z}{z}\, dz$$

für alle $(S,T) \in I^2$ gilt. Ferner gilt:

1. Es gilt

$$\Big| \int\limits_{\sigma_3^{S,T}} \frac{a^z}{z}\, dz \Big| = \Big| \int\limits_{-T}^{T} -\frac{a^{-S-it}}{-S-it}\, dt \Big| \leq \int\limits_{-T}^{T} \frac{a^{-S}}{|S+it|}\, dt \leq \int\limits_{-T}^{T} \frac{a^{-S}}{S}\, dt \leq \frac{2a^c T}{S}$$

für alle $(S,T) \in I^2$ und somit folgt

$$\lim_{S \to \infty} \Big(\int\limits_{\sigma_3^{S,T}} \frac{a^z}{z}\, dz \Big) = 0$$

für alle $T \in I$.

2. Wie im ersten Fall folgt, dass $\Big| \int\limits_{\sigma_2^{S,T}} \frac{a^z}{z}\, dz \Big| \leq \frac{a^c}{T\ln(a)}$ und $\Big| \int\limits_{\sigma_4^{S,T}} \frac{a^z}{z}\, dz \Big| \leq \frac{a^c}{T\ln(a)}$ für alle $(S,T) \in I^2$ gilt.

Insgesamt gilt damit

$$\Big| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1^{S,T}} \frac{a^z}{z}\, dz - 1 \Big| \leq \frac{a^c}{\pi T \ln(a)}$$

für alle $(S,T) \in I^2$ und damit gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(z)=c} \frac{a^z}{z}\, dz = \lim_{S,T \to \infty} \Big(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1^{S,T}} \frac{a^z}{z}\, dz \Big) = 1. \blacksquare$$

Bemerkungen:

1. Analog zur Bemerkung zu 2.2.4 gilt für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a \neq 1$ und für alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\int\limits_{\mathrm{Re}(z)=c} \frac{a^z}{z}\, dz = \lim_{\delta_{1,2} \to \infty} \Big(i \cdot \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{a^{c+it}}{c+it}\, dt \Big) = i \cdot \Big(\lim_{\delta_1 \to \infty} \int\limits_{-\delta_1}^{0} \frac{a^{c+it}}{c+it}\, dt + \lim_{\delta_2 \to \infty} \int\limits_{0}^{\delta_2} \frac{a^{c+it}}{c+it}\, dt \Big).$$

3.2.3 Satz

Sei $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(z)=c} \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{2}.$$

Beweis: Für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $\gamma_T : [-T,T] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto c+it$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_T} \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-T}^{T} \frac{i}{c+it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T}^{T} \frac{1}{c+it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T}^{T} \Big(\frac{c-t}{c^2+t^2} \Big)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Big(\int\limits_{-T}^{T} \frac{c}{c^2+t^2}\, dt - \underbrace{\int\limits_{-T}^{T} \frac{t}{c^2+t^2}\, dt}_{=0} \Big) \overset{\text{Subst.}}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\frac{T}{c}}^{\frac{T}{c}} \frac{c}{c^2+(cs)^2}\, ds = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\frac{T}{c}} \frac{1}{1+s^2}\, ds$$

$$= \frac{1}{\pi} \big[\arctan(s) \big]_0^{\frac{T}{c}} = \frac{\arctan\left(\frac{T}{c}\right)}{\pi}$$

für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$. Mit $T \longrightarrow \infty$ folgt die Behauptung. $\blacksquare$

3.2.4 Definition

Sei $\Lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert vermöge

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \ln(p), \text{ falls } n = p^k \text{ für } (p,k) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N} \text{ geeignet} \\ \quad 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt diese Funktion Mangoldt-Funktion.

3.2.5 Definition

Sei $\psi : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sum\limits_{\substack{(p,k) \in \mathbb{P}\times\mathbb{N} \\ p^k \le x}} \ln(p)$.

Bemerkungen:

1. Für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt
$$\psi(x) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \le x}} \Lambda(n).$$

2. Sei $x \in \mathbb{R}_{\ge 2}$. Dann gilt
$$\psi(x) \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{\substack{(p,k) \in \mathbb{P}\times\mathbb{N} \\ p^k \le x}} \ln(p) \overset{3.1.4}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p^k \le x}} \ln(p) \Big),$$
da die Menge $\{p^k \le x \,|\, (p,k) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}\}$ endlich ist. Für alle $p \in \mathbb{P}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dabei $p^k \le x$ genau dann, wenn $p \le \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$ gilt. Also folgt
$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p^k \le x}} \ln(p) \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(x^{\frac{1}{k}}).$$
Dabei ist die letzte Reihe endlich, da $\theta(x^{\frac{1}{k}}) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $x^{\frac{1}{k}} < 2$, das heißt, mit $\frac{\ln(x)}{\ln(2)} < k$, gilt. Da θ monoton steigend ist, folgt mit $K_x := \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ und mit $b \in \mathbb{R}_{>0}$ gewählt nach 3.1.6, dass
$$\psi(x) - \theta(x) = \sum_{k=2}^{\lfloor K_x \rfloor} \theta(x^{\frac{1}{k}}) \le \lfloor K_x \rfloor \cdot \theta(x^{\frac{1}{2}}) \le \frac{\ln(x)\theta(\sqrt{x})}{\ln(2)} \le \frac{b}{\ln(2)} \cdot \ln(x)\sqrt{x}$$
gilt. Daher gilt $\psi(x) = \theta(x) + O\big(\ln(x)\sqrt{x}\big)$ für $x \longrightarrow \infty$.

3.2.6 Satz

Sei $c \in \mathbb{R}_{>1}$. Dann gilt

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(z)=c} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \cdot \frac{x^z}{z}\, dz$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>1}$ mit $x \ne p^k$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Nach Serie 7, Aufgabe 1 gilt $-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}$ für alle $z \in H_1$. Dann folgt mit 3.2.2, dass für alle $x \in \mathbb{R}_{>1} \backslash \{p^k \,|\, (p,k) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}\}$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(z)=c} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \cdot \frac{x^z}{z}\, dz &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(z)=c} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \cdot \frac{x^z}{z}\, dz \\ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(z)=c} \frac{x^z}{z} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}\, dz &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int\limits_{\mathrm{Re}(z)=c} \frac{\Lambda(n) x^z}{z n^z}\, dz \Big) \\ = \sum_{(p,k) \in \mathbb{P}\times\mathbb{N}} \Big(\frac{\Lambda(p^k)}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(z)=c} \Big(\frac{x}{p^k}\Big)^z \cdot \frac{1}{z}\, dz \Big) &= \sum_{\substack{(p,k) \in \mathbb{P}\times\mathbb{N} \\ p^k \le x}} \Lambda(p^k) = \psi(x) \end{aligned}$$

gilt. Dabei kann die Vertauschung von Integration und Summation durch die lokal gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)x^z}{zn^z}$ auf H_1 gerechtfertig werden. Zur gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihe sei bemerkt, dass für alle $\gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ wegen $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{\ln(y)}{y^\alpha} = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\Big|\frac{\Lambda(n)x^z}{zn^z}\Big| \leq \frac{\ln(n)\cdot|x^z|}{|z|\cdot|n^z|} = \frac{\ln(n)\cdot x^{\mathrm{Re}(z)}}{|z|\cdot n^{\mathrm{Re}(z)}} \leq \frac{\ln(n)\cdot x^\gamma}{\delta\cdot n^{1+\epsilon}} \leq \frac{x^\gamma}{\delta\cdot n^{1+\frac{\epsilon}{2}}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>1}$, für alle $z \in \big(H_{1+\epsilon} \cap B_\gamma^{\mathbb{C}}(1)\big)\backslash\overline{B_\delta^{\mathbb{C}}(1)}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ groß genug gilt. ■

Mit dem Residuensatz folgt mit dem vorherigen Satz:

3.2.7 Satz

Für alle $x \in \mathbb{R}_{>1}$ mit $x \neq p^k$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

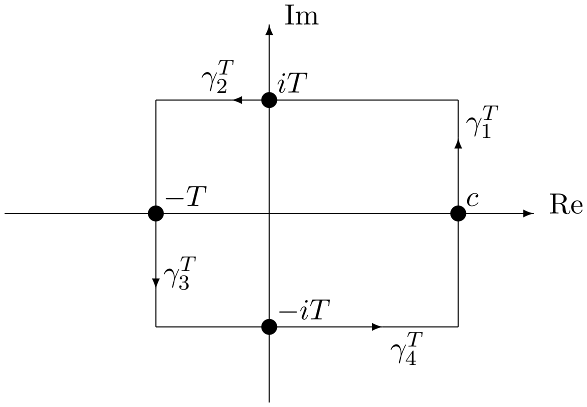
$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{z\in\mathbb{C}\\ \zeta(z)=0}} \frac{x^z}{z} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}.$$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}_{>1}$ mit $x \neq p^k$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \cdot \frac{x^z}{z}$$

mit $G := \mathbb{C}\backslash S$ mit $S := \zeta^{-1}(0) \cup \{0, 1\}$. Dann ist f holomorph und S ist diskret.[25]

Sei $c \in \mathbb{R}_{>1}$ und sei für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$ der Zyklus $\gamma^T : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ vermöge $\gamma^T := \sum\limits_{k=1}^{4} \gamma_k^T$ mit $\gamma_k^T : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ für alle $k \in \underline{4}$, wobei $\gamma_1^T(t) := (c - (1 - 2t)i)T$, $\gamma_2^T(t) := c + iT - (c + T)t$, $\gamma_3^T(t) := (1 + (1 - 2t)i)T$ sowie $\gamma_4^T(t) := -T - iT + (c + T)t$ für alle $t \in [0, 1]$ seien, definiert. Damit ergibt sich die folgende Situation:



Dann gilt

$$\lim_{T\to\infty}\Big(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1^T}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\cdot\frac{x^z}{z}\,dz\Big) = \psi(x) \tag{17}$$

und

$$\lim_{T\to\infty}\Big(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k^T}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\cdot\frac{x^z}{z}\,dz\Big) = 0 \tag{18}$$

[25] Da jede Nullstelle von ζ von endlicher Ordnung ist (Vergleiche Fischer, Funktionalanalysis, S.85.), ist jedes Element aus $S\backslash\{1\}$ eine Polstelle von f. Somit ist $S\backslash\{1\}$ diskret. Ferner ist ζ nahe 1 stets ungleich 0, da 1 eine Polstelle von ζ ist. Somit ist S diskret.

für alle $k \in \{2,3,4\}$, wobei bei den letzteren Rechnungen Abschätzungen der Form

$$\left|\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right| \leq d\big(\ln(|z|)\big)^2$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ außerhalb einer gewissen Umgebung der Nullstelen von ζ mit $d \in \mathbb{R}_{>0}$ benötigt werden. Ferner gilt für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\mathrm{Im}(\gamma^T) \cap S = \emptyset$:

Da das Innere des Zyklus γ^T ganz in $\mathbb{C}$ liegt, ist γ^T nullhomolog. Somit folgt nach dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^T} f(z)\,dz = \sum_{z\,\in\,E_T} n(\gamma^T, z)\mathrm{res}(f,z) \tag{19}$$

mit $E_T := \{z \in S \,|\, n(\gamma^T, z) \neq 0\}$, wobei $n(\gamma^T, z)$ von γ^T bezüglich z für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}(\gamma^T)$ bezeichne.

Ferner gilt für die Polstellen von f:

1. Nach der zweiten Bemerkung zu 3.1.9 ist 1 ein einfacher Pol von f und somit gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{res}(f,1) &= \lim_{z\to1}(z-1)f(z) = \big(\lim_{z\to1}\frac{x^z}{z}\big)\cdot\big(\lim_{z\to1}(z-1)\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\big)\\ &= x\cdot(-1) = -x\end{aligned}$$

   nach den Limesrechenregeln, Satz (2.5.4) aus der Vorlesung „Analysis IV“ und der zweiten Bemerkung zu 3.1.9.

2. Analog zu 1. ist wegen

$$\lim_{z\to0} zf(z) = \lim_{z\to0}\frac{x^z\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

   nach den Limesrechenregeln 0 ein einfacher Pol von f mit $\mathrm{res}(f,1) = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$.

3. Sei $w \in \zeta^{-1}(0)$. Da $\zeta \not\equiv 0$, ist w Nullstelle endlicher Ordnung.[26] Also existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und eine auf einer Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von w definierte holomorphe Funktion g, so dass $g(w) \neq 0$ und $f(z) = (z-w)^m g(z)$ für alle $z \in U$ gilt. Damit gilt

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{m}{z-w} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

   für alle $z \in U$. Somit gilt $\lim\limits_{z\to w}(z-w)f(z) = \frac{mx^w}{w}$ nach den Limesrechenregeln und daher ist w ein einfacher Pol von f mit $\mathrm{res}(f,w) = \frac{mx^w}{w}$.

Insgesamt folgt nun somit mit 3.2.6 und mit den Gleichungen (17) bis (19)

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(z)=c}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\cdot\frac{x^z}{z}\,dz = \lim_{T\to\infty}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^T} f(z)\,dz\Big)\\ &= -\lim_{T\to\infty}\Big(\sum_{z\,\in\,E_T} n(\gamma^T, z)\mathrm{res}(f,z)\Big) = -\lim_{T\to\infty}\Big(\sum_{z\,\in\,E_T} n(\gamma^{2\cdot\mathrm{Im}(z)}, z)\mathrm{res}(f,z)\Big)\\ &= -\sum_{z\,\in\,S} n(\gamma^{2\cdot\mathrm{Im}(z)}, z)\mathrm{res}(f,z)\Big) = x - \sum_{\substack{z\,\in\,\mathbb{C}\\ \zeta(z)=0}}\frac{x^z}{z} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)},\end{aligned}$$

wobei eine m-fache Nullstele in der letzten Summe auch m-mal gezählt wird. Außerdem sei dabei bemerkt, dass wegen 3.1.11 $\big(\bigcup\limits_{T\,\in\,\mathbb{R}_{>0}} E_T\big) \subseteq \mathbb{C}\backslash H_c$ gilt, und dass die Windungszahl nicht von der Wahl der umschließenden Kurve abhängt. ■

[26] Vergleiche Fischer, Funktionalanalysis, S.85.

Die Punkte aus $\{-2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ sind die sogenannten trivialen Nullstellen der riemannschen Zetafunktion ζ. Da $\ln(1+x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{k+1}}{k+1}$ für alle $x \in (-1,1)$ gilt, gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{-2k}}{2k} = -\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Also folgt

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{-2k}}{2k}\right) = -\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\geq 1}} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{2} = 0. \tag{20}$$

Somit reicht es zur Bestimmung der Asymptotik von $\psi(x)$ für $x \longrightarrow \infty$ die sogenannten nicht-trivialen Nullstellen von ζ, das heißt, die Nullstellen von ζ, die im „kritischen“ Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \in (0,1)\}$ liegen, zu betrachten. Damit folgt:

3.2.8 Korollar

Es gilt

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{z\,\in\, S_x \\ \zeta(z)=0}} \frac{x^z}{z} + O(x\ln(x)^2)$$

für $x \longrightarrow \infty$, wobei

$$S_x := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \in (0,1),\ |\mathrm{Im}(z)| \in [0,x)\,\}$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>1}$ sei.
Beweis: Folgt mit (20). ∎

Ferner kann gezeigt werden, dass $\sum_{\substack{z\,\in\, S_x \\ \zeta(z)=0}} \frac{x^z}{z} = O((\ln(x)^2)$ für $x \longrightarrow \infty$ gilt. Könnte nun gezeigt werden, dass ein $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ mit $\mathrm{Re}(z) < \alpha$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\zeta(z) = 0$ existiert, so gälte dann

$$\Big|\sum_{\substack{z\in S_x \\ \zeta(z)=0}} \frac{x^z}{z}\Big| \leq \sum_{\substack{z\in S_x \\ \zeta(z)=0}} \frac{x^{\mathrm{Re}(z)}}{|z|} = O(x^\alpha \ln(x)^2)$$

für $x \longrightarrow \infty$. In diesem Fall gälte dann $\psi(x) = x + O(x^\alpha \ln(x)^2)$ für $x \longrightarrow \infty$ mit 3.2.8.
Falls also die riemannsche Vermutung wahr ist, so folgt dies für $\alpha := \frac{1}{2}$ und für die Funktion π folgt dann $\pi(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,dt + O(x^{\frac{1}{2}}\ln(x))$ für $x \longrightarrow \infty$. Dabei sei bemerkt, dass

$$\int_2^x \frac{1}{\ln(t)} \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

für $x \longrightarrow \infty$ gilt.[27]

3.3 Zur Fortsetzbarkeit der riemannschen Zetafunktion

Nach 3.1.8 ist die riemannsche Zetafunktion ζ vermöge $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ für alle $z \in H_1$ definiert. Dabei wurde in der zweiten Bemerkung zu 3.1.9 gezeigt, dass ζ holomorph auf $H_0 \backslash \{0\}$ mit einem einfachen Pol in 1 fortgesetzt werden kann. Es soll nun gezeigt werden, dass ζ sogar auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortgesetzt werden kann.
Für den Beweis der Fortsetzbarkeit wird die sogenannte Gammafunktion benötigt, die im Folgenden nach einer Erinnerung an Resultate bezüglich der Existenz gewisser uneigentlicher Integrale definiert wird.

[27] Dies kann leicht mit der Regel von L'Hospital bewiesen werden.

Erinnerung[28]
Es gilt für $s \in \mathbb{R}$:

a. Das uneigentliche Integral $\int\limits_0^1 x^{-s}\, dx$ existiert genau dann, wenn $s < 1$ gilt.

b. Das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty x^{-s}\, dx$ existiert genau dann, wenn $s > 1$ gilt.

3.3.1 Definition

Die Funktion $\Gamma : H_0 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt$ heißt Gammafunktion.

Bemerkungen:

1. Sei $z \in H_0$ und sei $x := \mathrm{Re}(z) > 0$. Dann ist $\Gamma(z)$ wohldefiniert, denn es gilt mit obiger Erinnerung:

   i) Wegen $\lim\limits_{t\to\infty} t^k e^{-t} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\lim\limits_{t\to\infty} t^{2x}e^{-t} = 0$ nach dem Sandwich-Theorem. Also existiert ein $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ mit $t^{2x}e^{-t} \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq t_0}$. Damit ist

   $$f : \mathbb{R}_{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \begin{cases} t^{x-1}e^{-t}, \text{ falls } t \in [1, t_0] \\ t^{-(1+x)}, \text{ falls } t \geq t_0 \end{cases}$$

   eine über $\mathbb{R}_{\geq 1}$ eine integrierbare Funktion. Nach dem Satz von Lebesque über majorisierende Konvergenz ist existiert damit $\int\limits_1^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt$.

   ii) Für alle $t \in [0, 1]$ gilt

   $$\left|\frac{t^{z-1}}{e^t}\right| = t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

   Da $x > 0$ gilt, existiert $\int\limits_0^1 t^{-(1-x)}\, dt$ und somit existiert $\int\limits_0^1 t^{z-1}e^{-t}\, dt$ nach dem Satz von Lebesque über majorisierende Konvergenz.

2. Für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

   Analog zu i) existiert ein $t_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $t^{\epsilon-1}e^{-t} \leq t^{-2}$ für alle $t \in \mathbb{R}_{>t_0}$. Damit ist mit obiger Erinnerung analog zu i)

   $$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ t \longmapsto \begin{cases} t^{\epsilon-1}, \text{ falls } t \in (0, 1) \\ t^{x-1}e^{-t}, \text{ falls } t \in [1, t_0] \\ t^{-2}, \text{ falls } t \geq t_0 \end{cases}$$

   eine über $\mathbb{R}_{>0}$ eine integrierbare Funktion. Dabei gilt

   $$|\Gamma(z)| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t} \leq f(t)$$

   für alle $z \in H_0$ mit $\mathrm{Re}(z) < \epsilon$ und für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach dem Holomorphiesatz für parameterabhängige Integrale[29] ist damit $\Gamma\big|_{U_\epsilon}$ mit $U_\epsilon := \{z \in H_0 \mid \mathrm{Re}(z) < \epsilon\}$ holomorph.

   Da $\bigcup\limits_{\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}} U_\epsilon = H_0$ gilt, ist Γ holomorph.
   Alternativ kann die Holomorphie von Γ auch mit dem Satz von Morera gezeigt werden.

[28] Vergleiche Forster, Analysis 1, S.219 und S.220.
[29] Vergleiche Königsberger, Analysis II, S. 286.

3.3.2 Lemma

Für alle $z \in H_0$ gilt $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Beweis: Sei $z \in H_0$. Wegen $\lim\limits_{t\to\infty} t^k e^{-t} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und wegen

$$0 \leq t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t} \leq t^{\lfloor \mathrm{Re}(z) \rfloor}e^{-t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ folgt $\lim\limits_{t\to\infty} t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t} = 0$ und somit gilt $\lim\limits_{t\to\infty} t^{z-1}e^{-t} = 0$. Ferner folgt für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a < b$ mittels partieller Integration, dass

$$\int\limits_a^b t^{z-1}e^{-t}\,dt = \Big[\frac{t^z e^{-t}}{z}\Big]_a^b + \frac{1}{z}\cdot\int\limits_a^b t^z e^{-t}\,dt$$

gilt. Also gilt

$$\Gamma(z) = \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to\infty}} \int\limits_a^b t^{z-1}e^{-t}\,dt = \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to\infty}} \Big(\Big[\frac{t^z e^{-t}}{z}\Big]_a^b + \frac{1}{z}\cdot\int\limits_a^b t^z e^{-t}\,dt\Big) = \frac{1}{z}\cdot\int\limits_0^\infty t^z e^{-t}\,dt$$
$$\frac{1}{z}\Gamma(z+1)$$

mit den Limesrechenregeln und somit folgt $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. ■

Bemerkungen:

1. Induktiv folgt
$$\Gamma(z) = \Big(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z+k}\Big)\cdot\Gamma(z+n) \tag{21}$$
für alle $z \in H_0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Es gilt
$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to\infty}}\big[-e^{-t}\big] = -\lim_{b\to\infty}\big(-e^{-t}\big) + \lim_{a\to 0}\big(-e^{-t}\big) = 1$$
und somit folgt nach Gleichung (21), dass $\Gamma(n) = (n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3.3.3 Satz

Die Gammafunktion ist zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortsetzbar, deren Menge der Polstelle $-\mathbb{N}_0$ entspricht. Ferner gilt $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}_0$.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die rechte Seite der Gleichung (21) für alle $z \in H_{-n}\setminus -\mathbb{N}_0$ definiert. Damit ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_n : H_{-n} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \begin{cases} \big(\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z+k}\big)\cdot\Gamma(z+n), \text{ falls } z \in H_{-n}\setminus -\mathbb{N}_0 \\ \infty, \text{ falls } z \in H_{-n}\cap -\mathbb{N}_0 \end{cases}$$

eine meromorphe Funktion, deren Polstellen $0, -1, \ldots, -n+1$ sind. Ferner folgt aus Gleichung (21), dass für alle $n \in \mathbb{N}$

i) $\Gamma_n\big|_{H_0} = \Gamma$, sowie

ii) $\Gamma_{n+1}\big|_{H_{-n}\setminus -\mathbb{N}_0} = \Gamma_n$

gilt. Somit ist

$$\Gamma^* : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \begin{cases} \Gamma_{\lfloor \mathrm{Re}(z)\rfloor -1}(z), \text{ falls } z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}_0 \\ \infty, \text{ falls } z \in -\mathbb{N}_0 \end{cases}$$

eine wohldefinierte, meromorphe Funktion, die Γ auf $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzt, wobei die Menge der Polstelle von Γ^* die Menge $-\mathbb{N}_0$ ist.
Wegen $\Gamma^*\big|_{H_0} = \Gamma$ folgt mit 3.3.2 und mit dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen, dass

$$\Gamma^*(z+1) = z\Gamma^*(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ für alle $z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}_0$ gilt. ∎

3.3.4 Satz

Für alle $z \in H_1$ gilt $\zeta(z)\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt$.

Beweis: Sei $z \in H_1$. Dann existiert das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt$ (siehe unten). Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\Gamma(z)}{n^z} = \int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{n^z e^t}\,dt \overset{\text{Subst.}}{=} \int\limits_0^\infty \frac{(ns)^{z-1}}{n^z e^{ns}} \cdot n\,ds = \int\limits_0^\infty \frac{s^{z-1}}{e^{ns}}\,ds. \tag{22}$$

und somit existiert

$$\sum_{n=1}^N \int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^{nt}}\,dt = \int\limits_0^\infty \Big(\sum_{n=1}^N \frac{t^{z-1}}{e^{nt}}\,dt\Big)$$

für alle für alle $N \in \mathbb{N}$. Somit folgt wegen

$$\frac{1}{e^t-1} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{n=1}^\infty (e^{-t})^n = \sum_{n=1}^\infty e^{-nt}$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ mit dem Satz von Lebesque über majorisierte Konvergenz, dass

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt = \lim_{N\to\infty}\Big(\int\limits_0^\infty \Big(\sum_{n=1}^N \frac{t^{z-1}}{e^{nt}}\,dt\Big)\Big) = \lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{n=1}^N \Big(\int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^{nt}}\,dt\Big)\Big) = \sum_{n=1}^\infty \Big(\int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^{nt}}\,dt\Big)$$

gilt. Dabei gilt

$$\sum_{n=1}^\infty \Big(\int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^{nt}}\,dt\Big) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(z)}{n^z} = \Gamma(z) \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} = \Gamma(z)\zeta(z).$$

mit Gleichung (22). ∎

Da die Gammafunktion und die riemannsche Zetafunktion auf $H_0\setminus\{1\}$ beide holomorph sind, ist es nun wünschenswert, auch für alle $z \in \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w) \in (0,1)\}$ eine geschlossene Darstellung von $\Gamma(z)\zeta(z)$ zu gewinnen.

Das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt$ existiert für alle $z \in \mathbb{C}$, denn für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

Sei $x := \operatorname{Re}(z)$.

1. Sei $x \geq 0$. Für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ gilt

$$e^t - 1 = \sum_{k=1}^\infty \frac{t^k}{k!} \geq \frac{t^{\lfloor x\rfloor+2}}{(\lfloor x\rfloor+2)!}$$

und wegen $x-1 = \lfloor x\rfloor + \underbrace{(x-\lfloor x\rfloor)-1}_{<0}$ folgt somit

$$\Big|\frac{t^{z-1}}{e^t-1}\Big| = \frac{t^{x-1}}{e^t-1} \leq \frac{(\lfloor x\rfloor+2)\cdot t^{\lfloor x\rfloor)}}{t^{\lfloor x\rfloor+2}} = \frac{(\lfloor x\rfloor+2)}{t^2}.$$

Da $f : \mathbb{R}_{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \frac{(\lfloor x \rfloor + 2)}{t^2}$ nach obiger Erinnerung über $\mathbb{R}_{\geq 1}$ integrierbar ist, folgt somit nach dem Satz von Lebesque über majorisierende Konvergenz die Existenz von $\int\limits_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt$.

2. Sei $x < 0$. Dann ist $f : \mathbb{R}_{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \frac{1}{t^{2-x}}$ eine über $\mathbb{R}_{\geq 1}$ integrierbare Funktion, für die $\left|\frac{t^{z-1}}{e^t-1}\right| \leq f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ gilt. Analog zum ersten Fall folgt die Existenz des uneigentlichen Integrals.

In 3.3.4 wird die Einschränkung auf Werte aus H_1 allein für die Konvergenz des Integrals bei 0 benötigt. Um nun eine geschlossene Darstellung von $\Gamma(z)\zeta(z)$ für $z \in \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(w) \in (0,1)\}$ zu erhalten, wird daher für $z \in H_1$ das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt$ aus 3.3.4 wie folgt umgeschrieben:

Sei $z \in H_1$. Dann gilt:

1. Es gilt $\frac{1}{e^t-1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + O(t)$ für $t \longrightarrow 0$ (siehe S.19). Damit existiert $\epsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass
$$\left|\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right| \leq \frac{1}{2} + M|t| = \frac{1}{2} + Mt$$
und somit
$$\left|\Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big)t^{z-1}\right| \leq t^{\mathrm{Re}(z)-1}\Big(\frac{1}{2} + Mt\Big) = \frac{t^{\mathrm{Re}(z)-1}}{2} + Mt^{\mathrm{Re}(z)}$$
für alle $t \in B_\epsilon^{\mathbb{C}}(0)$ gilt. Damit existiert $\int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big)t^{z-1}\,dt$ nach dem Satz von Lebesque über majorisierende Konvergenz, da wegen $1 - \mathrm{Re}(z) < 1$ und wegen $-\mathrm{Re}(z) < 1$
$$h_1 : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \begin{cases} \frac{t^{\mathrm{Re}(z)-1}}{2} + Mt^{\mathrm{Re}(z)}, & \text{falls } t \in (0,\epsilon] \\ t^{\mathrm{Re}(z)-1}\Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big) & \text{sonst} \end{cases}$$
eine nach obiger Erinnerung über $(0,1)$ integrierbare Majorante ist.

2. Wegen $\mathrm{Re}(z) > 1$ gilt $2 - \mathrm{Re}(z) < 1$ und somit existiert $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^{2-\mathrm{Re}(z)}}\,dt$ nach obiger Erinnerung. Somit existiert $\int\limits_0^1 t^{z-2}\,dt$ nach dem Satz von Lebesque über majorisierende Konvergenz, da $h_2 : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto t^{\mathrm{Re}(z)-2}$ eine über $(0,1)$ integrierbare Majorante ist.

Also gilt
$$\int\limits_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt = \int\limits_0^1 t^{z-1}\Big(\frac{1}{e^t-1} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t}\Big)\,dt = \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big)t^{z-1}\,dt + \int\limits_0^1 t^{z-2}\,dt,$$
wobei
$$\int\limits_0^1 t^{z-2}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int\limits_\epsilon^1 t^{z-2}\,dt\Big) = \lim_{\epsilon\to 0}\Big[\frac{t^{z-1}}{z-1}\Big]_\epsilon^1 = \frac{1}{z-1} - \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon^{z-1}}{z-1} = \frac{1}{z-1}$$
gilt. Damit gilt insgesamt
$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big)t^{z-1}\,dt + \frac{1}{z-1} + \int\limits_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt. \tag{23}$$

Es kann gezeigt werden, dass die uneigentlichen Integrale, die in Gleichung (23) auftauchen, für alle $z \in H_0$ existieren. Damit folgt mit dem Identitätssatz, da $\Gamma\zeta$ auf $H_0\backslash\{1\}$ holomorph ist:

3.3.5 Lemma

Für alle $z \in H_0 \backslash \{1\}$ gilt

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}\Big) t^{z-1}\, dt + \frac{1}{z-1} + \int\limits_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

Beweis: Nach Obigem ist $h : H_0 \backslash \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$h(z) := \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}\Big) t^{z-1}\, dt + \frac{1}{z-1} + \int\limits_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt$$

eine wohldefinierte Abbildung. Ferner ist h nach dem Holomorphiesatz für parameterabhängige Integrale holomorph, denn es gilt:

Sei

$$f : H_0 \backslash \{1\} \times (0,1) \longrightarrow \mathbb{C},\ (z,t) \longmapsto \Big(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}\Big) t^{z-1}$$

und sei

$$g : H_0 \backslash \{1\} \times \mathbb{R}_{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{C},\ (z,t) \longmapsto \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}.$$

Seien ferner $F : H_0 \backslash \{1\} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \int\limits_0^1 f(z,t)\, dt$ und $G : H_0 \backslash \{1\} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \int\limits_0^1 g(z,t)$. Dann gilt für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $U_\epsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \in (0, \epsilon)\}$:

1. Es existieren $\delta, M \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

   $$\Big|\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}\Big| \leq \frac{1}{2} + M|t| = \frac{1}{2} + Mt$$

   für alle $t \in B_\delta^{\mathbb{C}}(0)$ gilt[30]. Sei

   $$h_\epsilon : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \begin{cases} \frac{t^{\epsilon-1}}{2} + Mt^\epsilon, \text{ falls } t \in (0, \min\{\delta, 1\}] \\ t^{\epsilon-1}\Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big), \text{ falls } t \in (\min\{\delta,1\}, 1) \end{cases}.$$

   Dann gilt $|f((z,t))| \leq h_\epsilon(t)$ für alle $(z,t) \in \mathbb{D}(f)$. Da h_ϵ über $(0,1)$ integrierbar ist, ist somit $F\big|_{U_\epsilon}$ holomorph.

2. Analog zur Konstruktion einer Majorante für $\int\limits_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\, dt$ mit $z \in \mathbb{C}$ auf S.54 kann eine Majorante für g auf U_ϵ gefunden werden. Damit ist G auf U_ϵ holomorph.

Somit ist h auf $U_\epsilon \backslash \{1\}$ für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ holomorph und insgesamt holomorph daher.
Da h und $\Gamma\zeta$ auf H_1 nach Gleichung 23 übereinstimmen, folgt die Behauptung mit dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen. ■

Mittels geschicktem Umschreibens des Integral $\int\limits_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\, dt$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (0,1)$ kann das vorherige Lemma spezifiziert werden:

[30] Vergleiche S.54.

3.3.6 Satz

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (0,1)$ gilt

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big) t^{z-1}\, dt.$$

Beweis: Es existiert $\int_1^\infty t^{z-2}\, dt$ nach dem Satz von Lebesque über majorisierende Konvergenz, da $\int_1^\infty t^{\mathrm{Re}(z)-2}\, dt$ nach obiger Erinnerung wegen $\mathrm{Re}(z) \in (0,1)$ existiert. Dabei gilt

$$\begin{aligned}\int_1^\infty t^{z-2}\, dt &= \lim_{\epsilon\to\infty}\Big(\int_1^\epsilon t^{z-2}\, dt\Big) = \lim_{\epsilon\to\infty}\Big(\int_1^\epsilon e^{-\mathrm{Log}(t)(2-z)}\, dt\Big)\\ &= \lim_{\epsilon\to\infty}\Big[\frac{t^{z-1}}{z-1}\Big]_1^\epsilon = -\frac{1}{z-1} \quad .\end{aligned}$$

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (0,1)$. Mit 3.3.5 gilt dann zusammen mit den vorherigen Rechnungen

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\zeta(z) &= \int_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big)t^{z-1}\, dt + \frac{1}{z-1} + \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\, dt\\ &= \int_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big)t^{z-1}\, dt + \frac{1}{z-1} + \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\, dt + \int_1^\infty t^{z-2}\, dt - \int_1^\infty t^{z-2}\, dt\\ &= \int_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big)t^{z-1}\, dt + \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\, dt - \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{t}\, dt\\ &= \int_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big)t^{z-1}\, dt + \int_1^\infty \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big)t^{z-1}\, dt = \int_0^\infty \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big)t^{z-1}\, dt\end{aligned}$$

Da z beliebig aus $\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (0,1)$ gewählt war, folgt die Behauptung. ∎

Mit derselben Methode kann $\Gamma\zeta$ auch meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden:

3.3.7 Satz

$\Gamma\zeta$ ist zu einer auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortsetzbar.
Beweis: Die meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \frac{1}{e^z-1}$ ist auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph und besitzt eine Laurentreihenentwicklung auf $B_\epsilon(0)\backslash\{0\}$ für ein $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ geeignet. Dabei ist 0 ein einfacher Pol.[31] Genauer gilt: Es existiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, so dass für alle $z \in B_{2\pi}(0)\backslash\{0\}$

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$$

gilt. Wegen

$$\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z} - \sum_{k=0}^n a_k z^k \sim a_{n+1} z^{n+1}$$

für $z \longrightarrow 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $z \in H_{-n-1}$ das Integral

$$\int_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} - \sum_{k=0}^n a_k t^k\Big)t^{z-1}\, dt.$$

[31] Siehe S. 19.

Somit gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} - \sum_{k=0}^n a_k t^k\Big) t^{z-1}\, dt + \frac{1}{z-1} + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{z+k} \\
&= \int_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} - \sum_{k=0}^n a_k t^k\Big) t^{z-1}\, dt + \frac{1}{z-1} + \sum_{k=0}^n \Big(a_k \cdot \int_0^1 t^{k+z-1}\, dt\Big) \\
&= \int_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} - \sum_{k=0}^n a_k t^k + \frac{1}{t} + \sum_{k=0}^n a_k t^k\Big) t^{z-1}\, dt = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\, dt
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $z \in H_{-n-1} \backslash \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq 1\}$. Mit $n \longrightarrow \infty$ und mit 3.3.4 folgt dann die Behauptung. ∎

Bemerkungen:

1. Die Koeffizienten obiger Laurentreihenentwicklung hängen eng mit den Bernoullizahlen zusammen.

2. Der Beweis zeigt, dass die meromorphe Fortsetzung von $\Gamma\zeta$ einfache Pole an den Stellen $-k \in \mathbb{N}_0$ mit $a_k \neq 0$ besitzt. Da Γ an diesen Stellen Pole besitzt, ist ζ dort holomorph. Damit folgt Satz 3.2.1.

Somit folgt:

3.3.8 Satz

Die riemannsche Zetafunktion ζ ist meromorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzbar.
Beweis: Dies folgt sofort mit 3.3.3 und 3.3.7. ∎

Ein anderer Weg, um die meromorphe Fortsetzbarkeit von $\Gamma\zeta$ auf ganz $\mathbb{C}$ zu zeigen, liefert zusätzlich noch eine weitere Funktionalgleichung.

Um die eben erwähnte Funktionalgleichung aufstellen zu können, werden zunächst einige Hilfsaussagen benötigt, und zwar:

3.3.9 Lemma

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\frac{iz}{2} \neq k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} = \frac{i}{2} \cdot \frac{\cos(\frac{iz}{2})}{\sin(\frac{iz}{2})} - \frac{1}{z} = \frac{i}{2} \cot\Big(\frac{iz}{2}\Big) - \frac{1}{z}.$$

Beweis: Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\frac{iz}{2} \neq k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2} \cot\Big(\frac{iz}{2}\Big) &= \frac{i}{2} \cdot \frac{\cos(\frac{iz}{2})}{\sin(\frac{iz}{2})} = \frac{i}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}\Big(\exp(\frac{i^2 z}{2}) + \exp(\frac{-i^2 z}{2})\Big)}{\frac{1}{2i}\Big(\exp(\frac{i^2 z}{2}) - \exp(\frac{-i^2 z}{2})\Big)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\exp(-\frac{z}{2}) + \exp(\frac{z}{2})}{\exp(-\frac{z}{2}) - \exp(\frac{z}{2})} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^z}{1-e^z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^z}{e^z-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2+e^z-1}{e^z-1} = \frac{1}{e^z-1} + \frac{1}{2}. \quad ∎
\end{aligned}$$

3.3.10 Lemma (Mittag-Leffler)

Für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ gilt

$$\pi \cdot \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2}.$$

Beweis: Hier nicht. (Die Idee besteht darin zu zeigen, dass die Differenz zwischen linker und rechter Seite eine ganze und beschränkte Funktion definiert, welche dann nach dem Satz von Liouville konstant ist.) ∎

3.3.11 Korollar

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\frac{iz}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} = 2z \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + 4\pi^2 k^2}.$$

Beweis: Die Behauptung folgt sofort mit 3.3.9 und mit 3.3.10. ∎

Damit kann nun $\Gamma\zeta$ auf H_{-1} folgender Maßen fortgesetzt werden:

Beginnend mit der Darstellung $\Gamma(z)\zeta(z) = \int\limits_0^\infty \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big) t^{z-1}\, dt$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (0,1)$ aus Satz 3.3.6 folgt mit 3.3.11 für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (0,1)$:

Es gilt

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\zeta(z) &= \int\limits_0^\infty \Big(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}\Big) t^{z-1}\, dt \\ &= \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\Big) t^{z-1}\, dt - \int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{2}\, dt + \int\limits_1^\infty \Big(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\Big) t^{z-1}\, dt. \end{aligned} \tag{24}$$

Dabei existiert $\int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{2}\, dt$ nach der Erinnerung zu Beginn dieses Paragraphen, da nach dieser $\int\limits_0^\infty \frac{t^{\mathrm{Re}(z)-1}}{2}\, dt$ existiert.

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (-1,1)$ existieren dabei drei Integrale aus Gleichung (24). Dabei gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (-1,0)$:

$$-\int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{2}\, dt = \lim_{\epsilon \to 0} \Big[-\frac{t^z}{2z} \Big]_\epsilon^1 = -\frac{1}{2z} = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_1^\infty t^{z-1}\, dt.$$

Somit folgt:

3.3.12 Satz

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (-1,0)$ gilt

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int\limits_0^\infty \Big(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\Big) t^{z-1}\, dt.$$

Beweis: Der Beweis erfolgt analog zu dem von 3.3.6. ∎

Mittels 3.3.11 kann die eben gewonnene Darstellung von $\Gamma(z)\zeta(z)$ mit $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (-1,1)$ so umgeformt werden, dass man dadurch eine meromorphe Fortsetzung von ζ auf ganz $\mathbb{C}$ erhält. Nach einer Erinnerung an eine Folgerung aus dem Residuensatz wird dieses dann explizit gezeigt:

Erinnerung

Sei $R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine rationale Abbildung und sei $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$. Ferner existiere das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty R(t) t^z\, dt$. Dann liefert der Residuensatz, dass

$$\big(1 - e^{2\pi i z}\big) \int\limits_0^\infty R(t) t^z\, dt = 2\pi i \sum_{w \in S} \mathrm{res}(f, w)$$

gilt. Dabei sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ die meromorphe Fortsetzung der durch $t \longmapsto R(t)t^z$ auf $\mathbb{R}$ definierten Abbildung und S sei die Menge der isolierten Singularitäten von f.

3.3.13 Satz / Definition

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (-1, 0)$ gilt

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \frac{2^{z-1}\pi^z}{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}\zeta(1-z).$$

Dabei heißt wird die Gleichung die Funktionalgleichung der ζ-Funktion genannt.
Beweis: Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (-1, 0)$. Dann folgt wegen $\frac{it}{2\pi} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\zeta(z) &\overset{3.3.12}{=} \int_0^\infty \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\Big) t^{z-1}\, dt \overset{3.3.11}{=} \int_0^\infty \Big(2t \cdot \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{tz^2 + 4\pi^2k^2}\Big) t^{z-1}\, dt \\
&= 2 \cdot \int_0^\infty \Big(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{t^2+4\pi^2k^2}\Big) t^z\, dt = 2 \cdot \sum_{k=1}^\infty \Big(\int_0^\infty \frac{t^z}{t^2+4\pi^2k^2}\, dt\Big) \\
&= 2 \cdot \sum_{k=1}^\infty \Big(\int_0^\infty \frac{(2\pi ks)^z}{(2\pi ks)^2 + 4\pi^2k^2} \cdot (2\pi k)\, ds\Big) = 2 \cdot \sum_{k=1}^\infty \Big((2\pi k)^{z-1} \int_0^\infty \frac{s^z}{s^2+1}\, ds\Big) \\
&= 2 \cdot \Big(\int_0^\infty \frac{s^z}{s^2+1}\, ds\Big) \cdot (2\pi)^{z-1} \cdot \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{1-z}} \\
&= 2^z\pi^{z-1}\zeta(1-z) \cdot \int_0^\infty \frac{s^z}{s^2+1}\, ds.
\end{aligned}$$

Sei $f : \mathbb{C}\backslash\{\pm i\} \longrightarrow \mathbb{C}, w \longmapsto \frac{w^z}{w^2+1}$. Diese Funktion ist meromorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzbar, wobei diese Fortsetzung wieder mit f bezeichnet sei. Ferner gilt

$$f(w) = \frac{\exp(z\mathrm{Log}(w))}{w^2+1}$$

für alle $w \in \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$. Damit folgt für das Integral $\int_0^\infty \frac{s^z}{s^2+1}\, ds$ nach vorangegangener Erinnerung:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{s^z}{s^2+1}\, ds &= \frac{2\pi i}{1-\exp(2\pi iz)}\big(\mathrm{res}(f,i) + \mathrm{res}(f,-i)\big) \\
&= \frac{2\pi i}{1-\exp(2\pi iz)}\big(\lim_{w\to i}(w-i)f(w) + \lim_{w\to -i}(w+i)f(w)\big) \\
&= \frac{2\pi i}{1-\exp(2\pi iz)}\Big(\lim_{w\to i}\frac{\exp(z\mathrm{Log}(w))}{w+i} + \lim_{w\to -i}\frac{\exp(z\mathrm{Log}(w))}{w-i}\Big) \\
&= \frac{2\pi i}{1-\exp(2\pi iz)}\Big(\frac{\exp(z\mathrm{Log}(i))}{2i} + \frac{\exp(z\mathrm{Log}(-i))}{-2i}\Big) \\
&= \frac{2\pi i}{1-\exp(2\pi iz)}\Big(\frac{\exp(z\frac{i\pi}{2})}{2i} + \frac{\exp(z\frac{-i\pi}{2})}{-2i}\Big) \\
&= \frac{2\pi i}{1-\exp(2\pi iz)}\Big(\frac{\exp(z\frac{i\pi}{2})}{2i} + \frac{\exp(z\frac{3i\pi}{2})}{-2i}\Big) \\
&= \frac{\pi}{1-\exp(2\pi iz)} \cdot \exp\Big(\frac{\pi iz}{2}\Big) \cdot (1-e^{\pi iz}) \\
&= \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{piz}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\Gamma(z)\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\zeta(1-z) \cdot \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{piz}{2}\right)}$$

und folgt die Behauptung. ■

Bemerkungen:

1. Da ζ meromorph auf H_0 ist, ist

$$f : \mathbb{C}\backslash\overline{H_1} \longrightarrow \mathbb{C} \cap \{\infty\},\ z \longmapsto \frac{2^{z-1}\pi^z}{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}\zeta(1-z)$$

eine meromorphe Funktion mit $\Gamma(z)\zeta(z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (-1,0)$. Damit kann $\Gamma\zeta$ meromorph auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

2. Die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \frac{2^{z-1}\pi^z}{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}\zeta(1-z).$$

mit $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (-1,0)$ wird auch oft in anderer Form geschrieben. Es kann gezeigt werden, dass

$$\Gamma(z) \cdot 2^{1-z} \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)},$$

und dass damit

$$\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\Big(\frac{z}{2}\Big)\zeta(z) = \pi^z \cdot \Gamma\Big(\frac{1-z}{2}\Big)\zeta(1-z)$$

sowie

$$\pi^{-\frac{z}{2}} \cdot \Gamma\Big(\frac{z}{2}\Big)\zeta(z) = \pi^{-\frac{1-z}{2}} \cdot \Gamma\Big(\frac{1-z}{2}\Big)\zeta(1-z) \tag{25}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (0,1)$ gilt. Dabei heißt Gleichung (25) die symmetrische Form der Funktionalgleichung der ζ-Funktion.

3.3.14 Definition

Die Funktion

$$\xi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\},\ z \longmapsto z(z-1) \cdot \pi^{-\frac{z}{2}} \cdot \Gamma\Big(\frac{z}{2}\Big)\zeta(z)$$

heißt riemannsche ξ- Funktion.

3.3.15 Satz

Es gilt $\xi(z) = \zeta(1-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Ferner ist ξ eine ganze Funktion und die Nullstellen dieser Funktion sind genau diejenigen von ζ im „kritischen Streifen“ $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \in (0,1)\}$.

Beweis: Hier nicht. ■

Stichwortverzeichnis