Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2013

Analytische Zahlentheorie
Serie 8

1. Für $x > 2$ sei
$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} .$$
Zeigen Sie, dass
$$\mathrm{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x}$$
für $x \to \infty$. Zeigen Sie auch, dass genauer für jedes $N \in \mathbb{N}$ sogar
$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x}\left(1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{k!}{(\log x)^k} + O\left(\frac{1}{(\log x)^{N+1}}\right)\right)$$
für $x \to \infty$ gilt.

2. Sei $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die aufsteigend geordnete Folge der Primzahlen, also $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, ...
Zeigen Sie, dass $p_k \sim k \log k$ für $k \to \infty$.

3. Die Euler-Mascheroni-Konstante γ ist durch
$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)\right)$$
definiert. Zeigen Sie, dass
$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \gamma + O(z-1)$$
für $z \to 1$.
Hinweis. Satz 3.6.

Abgabe bis Freitag, 21.06.13, vor der Vorlesung