Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2013

Analytische Zahlentheorie
Serie 7

1. Sei $\Lambda\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\Lambda(n) = \log p$, falls n von der Form $n = p^k$ mit $p \in \mathbb{P}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist, und $\Lambda(n) = 0$ sonst. Zeigen Sie, dass
$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}$$
für $\operatorname{Re} z > 1$.

   Hinweis. Lemma 3.11 (einschließlich Beweis).

2. Es seien $a, b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$. Die Reihen
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^z} \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^z}$$
seien absolut konvergent für $\operatorname{Re} z > r$.

   Zeigen Sie, dass
$$f(z)g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^z}$$
für $\operatorname{Re} z > r$, wobei $c\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$,
$$c(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d \mid n}} a(d)\, b\left(\frac{n}{d}\right).$$

3. Sei μ wie in Serie 6, Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass
$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \geq 2, \end{cases}$$
und
$$-\sum_{d \mid n} \mu(d) \log d = \sum_{d \mid n} \mu(d) \log \frac{n}{d} = \Lambda(n)$$
für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie außerdem, dass
$$\zeta(z)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^z}$$
für $\operatorname{Re} z > 1$, wobei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl n bezeichnet.

Abgabe bis Freitag, 14.06.13.