Analytische Zahlentheorie
Serie 6

1. Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^z}$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ konvergiert und dass
$$(2^{1-z} - 1)\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^z}$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$ gilt.

   Zusatz. Geben Sie damit einen neuen Beweis von Satz 3.6 der Vorlesung.

2. Sei $\mu\colon \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ definiert durch $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$ falls n Produkt von k verschiedenen Primzahlen ist und $\mu(n) = 0$ sonst, d.h., wenn n durch eine Primzahlpotenz teilbar ist. Es gilt also etwa $\mu(2) = -1$, $\mu(3) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = 1$.

   Zeigen Sie, dass
$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$.

3. Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 3.7 der Vorlesung, dass die Reihe
$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$$
divergiert.

Abgabe bis Freitag, 31.05.13, vor der Vorlesung