Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2013

Analytische Zahlentheorie
Serie 5

1. Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\left| \int_0^{N\delta} f(t)dt - \delta \sum_{k=1}^{N} f(k\delta) \right| \le \delta \int_0^{N\delta} |f'(t)|dt.$$

2. Sei c_n wie in Serie 3, Aufgabe 3, und W wie in Serie 4, Aufgabe 1. Sei

$$d_n = \frac{n!}{W(n)^n} \exp\left(\frac{n}{W(n)} - 1\right)$$

die in Serie 4, Aufgabe 2, erzielte obere Abschätzung von c_n.

Zeigen Sie mit der Sattelpunktmethode, dass

$$\begin{aligned} c_n &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n W(n)}} d_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n W(n)}} \frac{n!}{W(n)^n} \exp\left(\frac{n}{W(n)} - 1\right) \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{W(n)}} \left(\frac{n}{e\,W(n)}\right)^n \exp\left(\frac{n}{W(n)} - 1\right) \end{aligned}$$

Anleitung. Sei $f(z) = \exp(e^z - 1)$ wie in Serie 3, Aufgabe 3. Weiter sei $r_n = W(n)$. Zeigen Sie zunächst:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(r_n e^{it})}{(r_n e^{it})^n} &= \exp\left(e^{r_n} - 1 - \log r_n\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} n(1+r_n)t^2 + s_n(t)\right) \\ &= \frac{d_n}{n!} \exp\left(-\frac{1}{2} n(1+r_n)t^2 + s_n(t)\right), \end{aligned}$$

wobei $s_n(t) = O(t^3)$ für $t \to 0$.

Genauer existieren Konstanten $\delta, C > 0$, so dass mit $t_n = \delta/r_n$ für $|t| \le t_n$ die Abschätzung $|s_n(t)| \le C n r_n^2 |t|^3$ gilt.

(b) Es existiert $\alpha > 0$ mit

$$\left| \frac{f(r_n e^{it})}{(r_n e^{it})^n} \right| = \frac{d_n}{n!} \exp\left(-\frac{\alpha n}{r_n^2}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n W(n)}} \frac{d_n}{n!}\right)$$

für $|t| \ge t_n$.

Benutzen Sie dann die Abschätzungen aus (a) und (b), um die Asymptotik von

$$\frac{c_n}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_n} \frac{f(z)}{z^n} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(r_n e^{it})}{(r_n e^{it})^n} dt$$

zu bestimmen.

Abgabe bis Freitag, 24.05.13, im Postfach von Simon Albrecht.