Analytische Zahlentheorie
Serie 4

1. Sei $V\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $V(x) = xe^x$. Zeigen Sie, dass V bijektiv ist und dass für die Umkehrfunktion W von V Folgendes gilt:

   (a) $W(x) \sim \log x$ für $x \to \infty$;

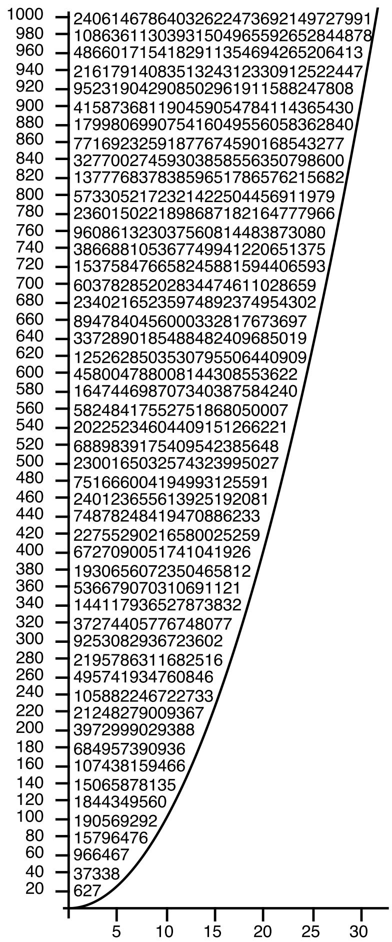
   (b) $W(x) = \log x - \log\log x + o(1)$ für $x \to \infty$;

   (c) $W(x) \leq \log x$ für $x \geq e$;

   (d) $W(x) \geq \log x - \log\log x$ für $x \geq e$.

2. Sei c_n wie in Serie 3, Aufgabe 3. Zeigen Sie (mit der Methode von Satz 2.5), dass
$$c_n \leq \frac{n!}{W(n)^n} \exp\left(\frac{n}{W(n)} - 1\right)$$
für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei W die Funktion aus Aufgabe 1 ist.

3. Die Abbildung zeigt die Werte der Partitionsfunktion für die Vielfachen von 20. Es ist also zum Beispiel $p(20) = 627$ oder $p(60) = 966467$. Die Skalierung auf der horizontalen Achse entspricht der Zahl der Ziffern, die für $p(n)$ benötigt werden. Die Kurve ist eine Parabel. Erläutern Sie mit Hilfe der Formel
$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n}\, e^{\pi\sqrt{2n/3}},$$
warum die Länge der Zahlen $p(n)$ so gut durch eine Parabel beschrieben werden kann. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel. Geben Sie mit Hilfe von Satz 2.5 eine obere Schranke für die Zahl der Ziffern von $p(n)$.



Abgabe bis Freitag, 10.05.13, vor der Vorlesung