Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2013

Analytische Zahlentheorie
Serie 3

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $q(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten, n als Summe von Elementen von $\mathbb{N}$ zu schreiben, wobei im Gegensatz zur Partitionsfunktion die Reihenfolge berücksichtigt wird. Es gilt etwa $q(4) = 8$, da

$$\begin{aligned}
&4 = 4,\\
&4 = 3 + 1,\\
&4 = 1 + 3,\\
&4 = 2 + 2,\\
&4 = 2 + 1 + 1,\\
&4 = 1 + 2 + 1,\\
&4 = 1 + 1 + 2 \quad \text{und}\\
&4 = 1 + 1 + 1 + 1.
\end{aligned}$$

Weiter sei $q_u(n)$ die entsprechende Anzahl, wobei alle Summanden ungerade sind, also etwa $q_u(4) = 3$, da $\quad 4 = 3 + 1, \quad 4 = 1 + 3 \quad$ und $\quad 4 = 1 + 1 + 1 + 1$.

Zeigen Sie, dass $q(n) = 2^{n-1}$ und $q_u(n) = F_n$ gilt, wobei F_n die n-te Fibonaccizahl ist.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei c_n die Anzahl der Möglichkeiten, die Menge $\{1, 2, \cdots, n\}$ in disjunkte Teilmengen zu zerlegen, also etwa $c_n = 5$, da

$$\begin{aligned}
&\{1,2,3\} = \{1,2,3\},\\
&\{1,2,3\} = \{1,2\} \cup \{3\},\\
&\{1,2,3\} = \{1,3\} \cup \{2\},\\
&\{1,2,3\} = \{2,3\} \cup \{1\} \quad \text{und}\\
&\{1,2,3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}.
\end{aligned}$$

Überzeugen Sie sich davon, dass c_n die Anzahl der Äquivalenzrelationen auf einer n-elementigen Menge ist.

Es sei $c_0 = 1$. Zeigen Sie, dass die c_n der Rekursionsformel

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_k$$

genügen.

3. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(e^x - 1)$ der Differentialgleichung $f'(x) = e^x f(x)$ genügt und benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n$$

für $x \in \mathbb{R}$, mit der in Aufgabe 2 definierten Folge (c_n).

Abgabe bis Freitag, 03.05.13, vor der Vorlesung