Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2013

Analytische Zahlentheorie
Serie 2

1. Bestimmen Sie die erzeugenden Funktionen der Folgen

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

und

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

2. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ rekursiv definiert durch $a_0 = 1$ und

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} .$$

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion von (a_n) und benutzen Sie dies dazu, die a_n in geschlossener Form zu schreiben.

3. Zeigen Sie, dass das unendliche Produkt

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen einen Ausdruck für das Teilprodukt

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

für $n \in \mathbb{N}$ und berechnen Sie damit den Wert des unendlichen Produkts.

Abgabe bis Freitag, 26.04.13, vor der Vorlesung