Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2013

Analytische Zahlentheorie
Serie 1

1. Sei $p \in \mathbb{C}$ und sei $(a_n)_{n\geq 0}$ rekursiv definiert durch $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = 2pa_{n-1} - a_{n-2}$. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der Folge (a_n) und benutzen Sie dies, um die a_n in geschlossener Form darzustellen.

2. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Zahlenfolge mit erzeugender Funktion
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$
Seien $(s_n)_{n\geq 0}$ und $(t_n)_{n\geq 0}$ die durch
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$
und $t_n = na_n$ definierten Folgen. Bestimmen Sie die erzeugenden Funktionen der Folgen (s_n) und (t_n).

3. Zeigen Sie, dass
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$
gilt, in dem Sie das Integral
$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$
einmal in kartesischen Koordinaten und einmal in Polarkoordinaten berechnen.

Abgabe am Freitag, den 19.4.13, vor der Vorlesung.