3. Primzahlen

Wir bezeichnen mit $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, \ldots\}$ die Menge der Primzahlen.

<u>Satz 3.1</u> Es gibt unendlich viele Primzahlen, d.h., $\operatorname{card} \mathbb{P} = \infty$.

<u>Beweis</u>. Andernfalls gilt $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Mit $m = p_1 \cdot \ldots \cdot p_N + 1$ gilt dann, dass $m \neq p_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, N\}$ und auch dass m teilerfremd zu allen p_j ist. Damit ist aber m Primzahl, ein Widerspruch.

Wir betrachten für $x > 0$ die Anzahl

$$\pi(x) = \operatorname{card}(\mathbb{P} \cap [0, x])$$

der Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x. Nach Satz 3.1 gilt

$$\pi(x) \to \infty \quad \text{für } x \to \infty.$$

Genauer gilt der sogenannte Primzahlsatz.

<u>Satz 3.2</u> Es gilt

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{für } x \to \infty.$$

Dieses Ergebnis wurde bereits um 1800 von Gauß und anderen vermutet und 1896 unabhängig voneinander von Hadamard und de la Vallée-Poussin mit Methoden der (komplexen) Analysis bewiesen. Diesen Satz soll auch hier bewiesen werden – wobei wir aber auf diverse, von verschiedenen Mathematikern gefundene Vereinfachungen der ursprünglichen Beweise zurückgreifen können.

Wir beginnen aber mit einigen elementaren Abschätzungen. Es stellt sich dabei als hilfreich heraus, außer $\pi(x)$ auch

$$\Theta(x) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P}, \\ p \leq x}} \log p$$

zu betrachten.

<u>Lemma 3.3</u>. Es gilt

$$\pi(x) \sim \frac{\Theta(x)}{\log x} \qquad \text{für } x \to \infty.$$

<u>Lemma 3.4</u> Es gilt

$$\sum_{\substack{p \le x \\ p \in \mathbb{P}}} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1)$$

und es existieren positive Konstanten a und b mit

$$a\,x \le \Theta(x) \le b\,x$$

für $x \ge 2$.

Aus diesen Lemmata erhält man sofort folgendes Resultat.

<u>Folgerung:</u> Es existieren positive Konstanten c und d mit

$$c\,\frac{x}{\log x} \le \pi(x) \le d\,\frac{x}{\log x}$$

für $x \ge 2$.

Im Folgenden werden wir, wie in der Definition von $\Theta(x)$ oder in Lemma 3.3, häufig Summen der Form

$$\sum_{\substack{p \le \dots \\ p \in \mathbb{P}}} \dots \quad \text{oder} \quad \sum_{\substack{p \ge \dots \\ p \in \mathbb{P}}} \dots$$

behalten. Wir lassen hier den Zusatz „$p \in \mathbb{P}$" weg, benutzen die Variable p aber nur dann, wenn ausschließlich über Primzahlen summiert wird.

Beweis von Lemma 3.3. Wir schreiben

$$n! = \prod_{p \le n} p^{e(p)},$$

wobei der Exponent $e(p)$ also die höchste Potenz von p angibt, die in $n!$ enthalten ist. Von den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ sind genau $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ durch p teilbar, $\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$ durch p^2 teilbar und allgemein $\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ durch p^k teilbar. Dies liefert

$$e(p) = \sum_{k \ge 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$

Die Summe ist dabei endlich, da $\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor = 0$ für $p^k > n$, d.h., $k > \frac{\log n}{\log p}$.

Es folgt, dass

$$\log n! = \log \Big(\prod_{p \le n} p^{e(p)} \Big)$$

$$= \sum_{p \le n} e(p) \log p$$

$$= \sum_{p \le n} \sum_{k \ge 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \log p$$

$$= \sum_{p \le n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \log p + \sum_{p \le n} \sum_{k \ge 2} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \log p$$

Nun gilt

$$\sum_{k \ge 2} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \le n \sum_{k \ge 2} \frac{1}{p^k} = \frac{n}{p^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^j}$$

$$= \frac{n}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{n}{p \cdot (p-1)}$$

und damit

$$\sum_{p \le n} \sum_{k \ge 2} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \log p \le n \cdot \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log p}{p\,(p-1)} = O(n),$$

denn $\displaystyle \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log p}{p(p-1)} \le \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\log j}{j\,(j-1)} \le 2 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\log j}{j^2}$,

und diese Reihe konvergiert da $\log j \le \sqrt{j}$ für große j (sogar $\log j \le j^{\varepsilon}$ für $\varepsilon > 0$, $j \ge j_\varepsilon$).

Weiter gilt nach der Stirlingformel

$$\log(n!) = \log\left((1+o(1))\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right)$$

$$= n\cdot\log\left(\frac{n}{e}\right) + \frac{1}{2}\log(2\pi n) + o(1)$$

$$= n\cdot\log n - n + \frac{1}{2}\log n + O(1)$$

Wir erhalten

$$\sum_{p\le n}\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\log p = n\cdot\log n + O(n)$$

Mit n durch $2n$ ersetzt ergibt sich

$$\sum_{p\le 2n}\left\lfloor\frac{2n}{p}\right\rfloor\log p = 2n\cdot\log(2n) + O(n)$$

$$= 2n\cdot\log n + O(n)$$

Zieht man die vorige Gleichung, multipliziert mit dem Faktor 2, ab, erhält man wegen $\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor = 0$ für $p>n$ nun

$$\sum_{p\le 2n}\left(\left\lfloor\frac{2n}{p}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\right)\log p = O(n).$$

Nun gilt $\lfloor 2x\rfloor - 2\lfloor x\rfloor \ge 0$ für alle $x\ge 0$,

aber $\lfloor 2x\rfloor - 2\lfloor x\rfloor = 1$ für $\frac{1}{2}\le x<1$.

Da $2n\neq p$ für $p\in\mathbb{P}$, $n\ge 2$, folgt

$$\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 1$$

für $n < p \leq 2n$. Dies liefert

$$\sum_{p \leq 2n} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \right) \log p \geq \sum_{n < p \leq 2n} \log p$$

$$= \Theta(2n) - \Theta(n),$$

also

$$\Theta(2n) - \Theta(n) = O(n)$$

Dies gilt auch, wenn man $n \in \mathbb{N}$ durch $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$, ersetzt, denn zwischen $2\lfloor x \rfloor$ und $2x$ liegt höchstens eine Primzahl,

also $\quad \Theta(2x) - \Theta(2\lfloor x \rfloor) \leq \log 2x = O(x)$.

und $\quad \Theta(x) - \Theta(\lfloor x \rfloor) = O(x)$.

Es gilt also

$$\Theta(2x) - \Theta(x) \leq K \cdot x$$

mit einer Konstanten $K > 0$. Es folgt

$$\Theta(x) = \Theta(x) - \Theta\left(\frac{x}{2}\right) + \Theta\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\leq K \cdot x + \Theta\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= K \cdot x + \Theta\left(\frac{x}{2}\right) - \Theta\left(\frac{x}{4}\right) + \Theta\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$\leq K \cdot x + K \cdot \frac{x}{2} + \Theta\left(\frac{x}{4}\right)$$

Insbesondere erhält man

$$\Theta(x) \le k \cdot x \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} + \Theta\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

$$\le 2k \cdot x + \Theta\left(\frac{x}{2^k}\right),$$

Wählt man k maximal mit $x/2^k \geq 2$, so erhält man

$$\Theta(x) = O(x)$$

für $x \to \infty$.

Aus der oben bewiesenen Ungleichung

$$\sum_{p \le n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \log p = n \cdot \log n + O(n)$$

erhält man nun wegen

$$0 \le n \sum_{p \le n} \frac{\log p}{p} - \sum_{p \le n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \log p \le \sum_{p \le n} \log p = \Theta(n)$$

jetzt die erste Behauptung von Lemma 3.3, zunächst für $x = n \in \mathbb{N}$, aber dann auch für $x \in \mathbb{R}$.

Es verbleibt, die untere Schranke für $\Theta(x)$ zu beweisen.

Für $0<\alpha<1$ gilt nach dem gerade Bewiesenen

$$\sum_{\alpha x<p\le x}\frac{\log p}{p} = \log x - \log \alpha x + O(1)$$

$$= \log\frac{1}{\alpha} + O(1),$$

wobei der $O(1)$-Term weder von α noch von x abhängt. Wählt man α klein genug, folgt

$$\sum_{\alpha x\le p\le x}\frac{\log p}{p} \geqslant 1.$$

für $x\geqslant 2/\alpha$. Andererseits gilt

$$\sum_{\alpha x<p\le x}\frac{\log p}{p} \le \frac{1}{\alpha x}\sum_{\alpha x<p\le x}\log p = \frac{\theta(x)}{\alpha x}.$$

Es folgt $\theta(x)\geqslant \alpha x$. $\blacksquare$

<u>Beweis von Lemma 3.2</u>. Zunächst gilt

$$\theta(x) = \sum_{p\le x}\log p \le \sum_{p\le x}\log x = \pi(x)\log x.$$

Für die Abschätzung in die umgekehrte Richtung sei $\varepsilon>0$. Dann gilt

$$\Theta(x) \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} \log p$$

$$\geq \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} \log(x^{1-\varepsilon})$$

$$= (1-\varepsilon) \log x \left(\pi(x) - \pi(x^{1+\varepsilon})\right),$$

also mit Lemma 3.3

$$\pi(x) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\Theta(x)}{\log x} + \pi(x^{1-\varepsilon})$$

$$\leq \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\Theta(x)}{\log x} + x^{1-\varepsilon}$$

$$\leq \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\Theta(x)}{\log x} + \frac{1}{a} \frac{\Theta(x)}{x^{\varepsilon}}.$$

Es folgt

$$\frac{\pi(x) \log x}{\Theta(x)} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{1}{a} \frac{\log x}{x^{\varepsilon}}$$

$$\leq \frac{1}{1-\varepsilon} + \varepsilon$$

falls x groß genug, und mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

Wesentliches Hilfsmittel bei der Untersuchung der Primzahlen, insbesondere beim Primzahlsatz, ist die im Folgenden definierte Riemannsche Zetafunktion.

Zunächst sei daran erinnert, dass für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ die Potenz a^z durch

$$a^z = \exp(z \cdot \log a)$$

definiert ist. Es gilt dann

$$|a^z| = \exp(\operatorname{Re} z \cdot \log a) = a^{\operatorname{Re} z}.$$

Die Funktion $z \mapsto a^z$ ist ganz (d.h., in $\mathbb{C}$ holomorph).

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $H_t = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > t\}$.

<u>Definition und Satz 3.5</u>. Durch

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

ist eine holomorphe Funktion $\zeta : H_1 \to \mathbb{C}$ gegeben. Diese heißt Riemannsche Zetafunktion.

<u>Beweis.</u> Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $z \in H_{1+\varepsilon}$

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} .$$

Damit konvergiert die Reihe gleichmäßig in $H_{1+\varepsilon}$, also lokal gleichmäßig in H_1. Nach dem Satz von Weierstraß ist ζ holomorph.

<u>Satz 3.6.</u> Die durch $z \mapsto \zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ definierte Funktion hat eine holomorphe Fortsetzung nach H_0.

<u>Beweis.</u> Für $z \in H_1$ gilt

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^z}\, dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^z} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x^z}\, dx \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right) dx .$$

Für $x \in [n, n+1]$ gilt nun

$$\left| \frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right| = \left| \int_n^x \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^z} \right) dt \right|$$

$$= \left| \int_n^x \frac{-z}{t^{z+1}}\, dt \right|$$

$$\leq (x-n) \cdot \max_{t\in[n,x]} \left| \frac{z}{t^{z+1}} \right|$$

$$= (x-n)\cdot |z| \max_{t\in[n,x]} \frac{1}{t^{\mathrm{Re}\, z+1}}$$

$$= (x-n)\, |z| \frac{1}{n^{\mathrm{Re}\, z+1}}$$

$$\leq \frac{|z|}{n^{\mathrm{Re}\, z+1}} .$$

Es folgt

$$\left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z}\right) dx \right| \leq \frac{|z|}{n^{\mathrm{Re}\, z+1}}$$

und damit konvergiert die angegebene Reihe für $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ lokal gleichmäßig in H_0, stellt nach dem Satz von Weierstraß also eine dort holomorphe Funktion dar.

<u>Bemerkung.</u> Tatsächlich ist durch $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ sogar eine ganze Funktion gegeben.

Der Zusammenhang zwischen der Zetafunktion und den Primzahlen wird durch folgenden Satz deutlich.

<u>Satz 3.7</u> Für $z \in H_1$ gilt

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}}.$$

<u>Beweis</u>. Zunächst sei bemerkt, dass das unendliche Produkt in H_1 lokal gleichmäßig konvergiert, da die Reihe $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^z}$ dies tut.

Zählt man die Primzahlen in der Form $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \ldots$ ab, so gilt für $N \in \mathbb{N}$, dass

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^z}} = \prod_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_k^z}\right)^j$$

$$= \prod_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^{jz}}$$

$$= \sum_{n \in M_N} \frac{1}{n^z},$$

wobei M_N die Menge aller natürlichen

Zahlen (einschließlich 1) sind, deren Zerlegung in Primfaktoren nur die Primzahlen $p_1, \ldots, p_N$ enthält. Mit $N \to \infty$ folgt die Behauptung.

<u>Folgerung 3.8</u>. Es gilt $\zeta(z) \neq 0$ für $\operatorname{Re} z > 1$.

Dies folgt, da die Faktoren des unendlichen Produkts keine Nullstellen haben.

Eines der berühmtesten ungelösten Probleme der Mathematik ist das folgende.

<u>Riemannsche Vermutung</u>. Alle Nullstellen von ζ in $H_0 = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ haben Realteil $\frac{1}{2}$.

Man nennt die durch $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ gegebene Gerade auch kritische Gerade. Die Vermutung besagt, dass alle Nullstellen in der rechten Halbebene auf der kritischen Geraden liegen. (In der linken Halbebene gibt es Nullstellen in $-2, -4, -6, \ldots$, die sogenannten trivialen Nullstellen.) Ein Beweis der Riemannschen Vermutung würde sehr gute Abschätzungen

des Fehlerterms im Primzahlsatz liefern.
Für den Beweis in der angegebenen Form reicht aber ein schwächeres Ergebnis aus.

<u>Satz 3.9</u> Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z = 1$ gilt $\zeta(z) \neq 0$.

Für den Beweis dieses Satzes, wie auch im weiteren Verlauf des Beweises des Primzahlsatzes, ist es günstig, noch eine weitere Funktion zu betrachten, die an die in Lemma 3.3 betrachtete Summe erinnert.

<u>Definition und Satz 3.10</u> Durch

$$\phi(z) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log p}{p^z}$$

ist eine holomorphe Funktion $\phi : H_1 \to \mathbb{C}$ gegeben.

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$. Für große p gilt $\log p \leq p^{\varepsilon/2}$ und damit

$$\left| \frac{\log p}{p^z} \right| \leq \frac{p^{\varepsilon/2}}{p^{\operatorname{Re} z}} \leq \frac{1}{p^{1+\varepsilon/2}} \quad \text{für } z \in H_{1+\varepsilon}.$$

Hieraus folgt wieder leicht die Behauptung.

Der Zusammenhang zwischen ϕ und ζ ist durch das folgende Resultat gegeben.

<u>Lemma 3.11</u> Für $z \in H_1$ gilt

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \phi(z) + \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^z(p^z-1)},$$

wobei die Reihe rechts sogar lokal gleichmäßig in $H_{1/2}$ konvergiert.

<u>Beweis</u>. Sei (f_k) eine Folge in einem Gebiet Ω holomorpher, nullstellenfreier Funktionen. Durch vollständige Induktion zeigt man leicht, dass für

$$F_n = \prod_{k=1}^{n} f_k$$

die Gleichung

$$\frac{F_n'}{F_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k}$$

gilt. (Diese Gleichung kann man sich durch

$$\frac{F_n'}{F_n} = (\log F_n)' = \left(\sum_{k=1}^{n} \log f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k}$$

merken, und auch so beweisen.)

konvergiert das unendliche Produkt

$$F = \prod_{k=1}^{\infty} f_k \quad ,$$

so erhält man hieraus

$$\frac{F'}{F} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k'}{f_k} .$$

Mit Satz 3.7 folgt hieraus mit $\frac{\left(\frac{1}{F}\right)'}{\frac{1}{F}} = -\frac{F'}{F}$

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{p^z}\right)}{1-\frac{1}{p^z}}$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{-\frac{d}{dz}(p^{-z})}{1-p^{-z}}$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{p^{-z}\cdot\log p}{1-p^{-z}}$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^z-1}$$

und damit

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - \phi(z) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \log p \left(\frac{1}{p^z-1} - \frac{1}{p^z}\right)$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{P}}^{\infty} \frac{\log p}{p^z(p^z-1)}$$

Für $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2} + \varepsilon$ gilt

$$\left| \frac{\log p}{p^z(p^z-1)} \right| \le \frac{\log p}{|p^z|\,(|p^z|-1)}$$

$$= \frac{\log p}{p^{\operatorname{Re} z}(p^{\operatorname{Re} z} - 1)}$$

$$< \frac{\log p}{p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(p^{\frac{1}{2}+\varepsilon} - 1)}$$

Für große p gilt $\log p < p^{\varepsilon/2}$ und $2 < p^{\varepsilon/2}$, also $p^{\frac{1}{2}+\varepsilon} > 2 p^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} > p^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} + 1$,

und damit

$$\left| \frac{\log p}{p^z(p^z-1)} \right| \le \frac{p^{\varepsilon/2}}{p^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\; p^{\frac{1}{2}+\varepsilon/2}} = \frac{1}{p^{1+\varepsilon/2}}.$$

Hieraus folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz der in der Behauptung auftretenden Reihe in $H_{1/2}$.

Da nach Satz 3.6 die Funktion $z \mapsto \zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ eine holomorphe Fortsetzung nach H_0 hat, hat ζ also einen einfachen Pol in 1, d.h., die durch $z \mapsto (z-1)\zeta(z)$ definierte Funktion g hat eine holomorphe Fortsetzung nach 1 mit $g(1) \neq 0$. Es folgt, dass

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{-1}{z-1} - \frac{g'(z)}{g(z)} = -\frac{1}{z-1} + O(1) \quad \text{für } z \to 1.$$

Mit Lemma 3.11 hat also die durch

$$z \mapsto \Phi(z) - \frac{1}{z-1}$$

definierte Funktion hat also eine holomorphe Fortsetzung nach 1.

Satz 3.9 ist damit äquivalent zu dem folgenden Resultat.

Lemma 3.12. Die durch $z \mapsto \Phi(z) - \frac{1}{z-1}$ definierte Funktion hat eine holomorphe Fortsetzung in ein Gebiet Ω mit $\Omega \supset \overline{H_1}$.

Beweis von Satz 3.9 (und Lemma 3.12).

Sei $z_1 = 1 + i\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ eine m-fache Nullstelle von ζ, also $\zeta(z) = (z - z_1)^m f_1(z)$ wobei f_1 holomorph in z_1 mit $f_1(z_1) \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{m}{z - z_1} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

also

$$\lim_{z \to z_1} (z - z_1)\zeta(z) = m_1.$$

Da $\zeta(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$, gilt $\zeta(\bar{z}) = \overline{\zeta(z)}$ und damit ist auch $\bar{z}_1$ Nullstelle der Ordnung m.
Es gilt also auch

$$\lim_{z \to \bar{z}_1} (z - \bar{z}_1) \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = m .$$

Mit Lemma 3.1 folgt

$$\lim_{z \to z_1} (z - z_1)\, \phi(\zeta) = \lim_{z \to \bar{z}_1} (z - \bar{z}_1)\, \phi(\zeta) = -m ,$$

also

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, \phi(1 + \varepsilon \pm \alpha) = -m .$$

Für $z_2 = 1 + 2i\alpha$ gilt analog $\zeta(z) = (z - z_2)^n f_2(z)$ mit f_2 holomorph in z_2 und $f_2(z_2) \neq 0$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$. (Es gilt $n = 0$ falls $\zeta(z_2) \neq 0$.)
Es folgt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, \phi(1 + \varepsilon \pm 2\alpha) = -n$$

Schließlich hat ζ nach Satz 3.6 einen einfachen Pol in 1 womit

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{1}{z-1} + O(1) \quad \text{für } z \to 1 .$$

Mit Lemma 3.11 folgt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, \phi(1 + \varepsilon) = 1 .$$

Aus den obigen Formeln folgt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \Big(\phi(1+\varepsilon-2i\alpha) + 4\phi(1+\varepsilon-i\alpha) + 6\phi(1+\varepsilon) + 4\phi(1+\varepsilon+i\alpha) + \phi(1+\varepsilon+2i\alpha) \Big)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sum_{j=-2}^{2} \binom{4}{2+j} \phi(1+\varepsilon+ j i\alpha)$$

$$= -2n - 8m + 6 \leq -8 + 6 = -2 < 0 .$$

Andererseits gilt aber mit der binomischen Formel

$$\left(p^{-i\alpha/2} + p^{i\alpha/2}\right)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} p^{-ik\alpha/2} \cdot p^{i(4-k)\alpha/2}$$

$$= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} p^{i(2-k)\alpha}$$

$$= \sum_{j=-2}^{2} \binom{4}{2+j} p^{-ij\alpha}$$

und damit

$$\sum_{j=-2}^{2} \binom{4}{2+j} \phi(1+\varepsilon+j i\alpha) = \sum_{j=-2}^{2} \binom{4}{2+j} \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon+ji\alpha}}$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \sum_{j=-2}^{2} \binom{4}{2+j} p^{-ji\alpha}$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \left(p^{-i\alpha/2} + p^{i\alpha/2}\right)^4$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \left(2\,\mathrm{Re}(p^{i\alpha/2})\right)^4$$

$$\geq 0$$

für alle $\varepsilon > 0$. Das ist ein Widerspruch.

Zum Beweis des Primzahlsatzes benötigen wir jetzt noch folgendes Ergebnis, dessen Beweis wir später nachtragen (und das wir dann auch in einen Kontext einordnen).

<u>Satz 3.13</u> Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ beschränkt und messbar und sei $g : H_0 \to \mathbb{C}$,
$$g(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt$$
die Laplace-Transformierte von f. Die Funktion g habe eine holomorphe Fortsetzung in ein Gebiet Ω mit $\Omega \supset \overline{H_0}$.
Dann existiert das uneigentliche Integral
$$\int_0^\infty f(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T f(t)\, dt$$
und es gilt
$$\int_0^\infty f(t)\, dt = g(0) = \lim_{z\to 0} g(z)$$

Bem. Die Existenz des Integrals

$$\int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt$$

für $\operatorname{Re} z > 0$ folgt mit $|e^{-zt}| = e^{-t \cdot \operatorname{Re} z}$ direkt aus dem Majorantenkriterium. Ebenso sieht man leicht, dass g holomorph in H_0 ist. Die entscheidende Voraussetzung ist die holomorphe Fortsetzbarkeit von g.

Beweis des Primzahlsatzes (Satz 3.2).

Nach Lemma 3.3 genügt es zu zeigen, dass

$$\Theta(x) \sim x \quad \text{für } x \to \infty.$$

Nach Lemma 3.12 hat die Funktion

$$\Phi(z) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log p}{p^z}$$

eine holomorphe Fortsetzung in ein Gebiet $\Omega \supset \overline{H_1}$.

Sei nun $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$, mit $p_{k+1} > p_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Sei außerdem noch $p_0 = 1$ und damit $\log p_0 = 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\log p_k}{p_k^z} = \sum_{k=1}^{n} \log p_k \left(- \int_{p_0}^{p_k} \frac{z}{t^{z+1}} dt + 1 \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \log p_k \left(1 - \sum_{j=1}^{k} z \cdot \int_{p_{j-1}}^{p_j} \frac{dt}{t^{z+1}} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \log p_k - z \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \log p_k \cdot \int_{p_{j-1}}^{p_j} \frac{dt}{t^{z+1}}$$

$$= \Theta(p_n) - z \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \log p_k \cdot \int_{p_{j-1}}^{p_j} \frac{dt}{t^{z+1}}$$

$$= \Theta(p_n) - z \sum_{j=1}^{n} \int_{p_{j-1}}^{p_j} \frac{dt}{t^{z+1}} \sum_{k=j}^{n} \log p_k$$

$$= \Theta(p_n) - z \sum_{j=1}^{n} \int_{p_{j-1}}^{p_j} \frac{dt}{t^{z+1}} \left(\Theta(p_n) - \Theta(p_{j-1}) \right)$$

$$= \Theta(p_n) - z \cdot \Theta(p_n) \int_{p_0}^{p_n} \frac{dt}{t^{z+1}} + z \sum_{j=1}^{n} \int_{p_{j-1}}^{p_j} \frac{\Theta(t)}{t^{z+1}} dt$$

$$= \Theta(p_n) \cdot \frac{1}{p_n^z} + z \int_{1}^{p_n} \frac{\Theta(t)}{t^{z+1}} dt \quad .$$

Da $\Theta(x) = O(x)$ nach Lemma 3.4

folgt

$$\frac{\Theta(p_n)}{p_n^z} \to 0$$

für $n \to \infty$ falls $\operatorname{Re} z > 1$ und damit

$$\Phi(z) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log p}{p^z} = z \int_1^\infty \frac{\Theta(t)}{t^{z+1}} \, dt$$

Es folgt mit Substitutionsregel, dass (für $\operatorname{Re} z > 1$)

$$\Phi(z) = z \int_0^\infty \Theta(e^s) e^{-sz} \, ds$$

Außerdem gilt (für $\operatorname{Re} z > 0$)

$$\frac{1}{z} = \int_0^\infty e^{-sz} \, dz$$

Wir erhalten für $\operatorname{Re} z > 0$

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \int_0^\infty \left(\Theta(e^s) e^{-s} - 1\right) e^{-sz} \, ds.$$

Nun gilt

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z+1}\left(\Phi(z+1) - \frac{z+1}{z}\right)$$

$$= \frac{1}{z+1}\left(\Phi(z+1) - \frac{1}{z} - 1\right).$$

Damit hat diese Funktion nach Lemma 3.12 eine holomorphe Fortsetzung in ein Gebiet, welches $\overline{H}_0$ enthält. Mit Satz 3.13 folgt, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \left(\Theta(e^s)e^{-s} - 1\right) ds = \int_0^\infty \frac{\Theta(t)\cdot\frac{1}{t} - 1}{t}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{\Theta(t) - t}{t^2}\, dt$$

konvergiert. Hieraus folgt aber $\Theta(x) \sim x$, denn ist etwa $\varepsilon > 0$ und $\Theta(x) \geq (1+\varepsilon)x$, so folgt mit der Monotonie von Θ, dass

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} \geq \int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{(1+\varepsilon)x - t}{t^2}\, dt$$

$$= \int_1^{1+\varepsilon} \frac{1+\varepsilon-u}{u^2} > 0$$

was wegen der Konvergenz des Integrals nicht für beliebig große x gelten kann. Ebenso führt $\Theta(x) \leq (1-\varepsilon)x$ auf

$$\int_{(1-\varepsilon)x}^{x} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} \leq \int_{(1-\varepsilon)x}^{x} \frac{(1-\varepsilon)x - t}{t^2}\, dt = \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{1-\varepsilon-t}{t^2}\, dt < 0,$$

was ebenfalls nur für eine beschränkte Menge von x-Werten gelten kann.

Damit ist der Primzahlsatz bewiesen, aber es bleibt der Beweis von Satz 3.13 nachzutragen.

<u>Beweis von Satz 3.13</u>. Für $T>0$ betrachten wir die Funktion $g_T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$g_T(z) = \int_0^T f(t) e^{-zt}\, dt .$$

Die Funktion g ist ganz, wie man z.B. durch eine Anwendung des Satzes von Morera einsieht. Zu zeigen ist, dass

$$\lim_{T\to\infty} g_T(0) = g(0).$$

Ist h holomorph in Ω und γ eine den Nullpunkt im positiven Sinne umlaufende Kurve in Ω, so gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$h(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(z)}{z}\, dz .$$

Wir wählen, für R groß und $\delta = \delta(R) > 0$ so klein, dass $D_{R,\delta} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \operatorname{Re} z > -\delta\} \subset \Omega$ gilt, γ als Rand von $D_{R,\delta}$

Außerdem wählen wir

$$h(z) = h_T(z) = \left(g(z) - g_T(z)\right) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)$$

womit

$$h_T(0) = g(0) - g_T(0)$$

Zu zeigen ist, dass

$$h(0) = h_T(0) \to 0 \quad \text{für } T \to \infty.$$

Sei nun
$$M = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$$

Für $x = \operatorname{Re} z > 0$ gilt dann

$$|g(z) - g_T(z)| = \left| \int_T^\infty f(t) e^{-zt}\, dt \right|$$

$$\leq M \cdot \int_T^\infty e^{-xt}\, dt = \frac{M \cdot e^{-xT}}{x}.$$

während für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$, also $R^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$,

$$\left| e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| = \left| e^{zT}\left(1 + \frac{z}{\bar{z}}\right) \cdot \frac{1}{z} \right|$$

$$= e^{xT} \left| \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) \right|$$

$$= e^{xT} \left| \frac{\bar{z} + z}{z \cdot \bar{z}} \right|$$

$$= e^{xT} \frac{2x}{R^2}.$$

Für $x = \operatorname{Re} z > 0$, $|z| = R$, folgt also

$$|h_T(z)| = |g(z) - g_T(z)| \cdot \left| e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{M \cdot e^{-xT}}{x} e^{xT} \frac{2x}{R^2} = \frac{2M}{R^2}.$$

Sei γ_+ die Teilkurve von γ, die in H_0 verläuft. Es folgt

$$\left| \int_{\gamma_+} \frac{h_T(z)}{z} dz \right| \leq \pi \cdot R \cdot \frac{2M}{R^2} = \frac{2\pi M}{R}.$$

Für die Teilkurve γ_-, die in $\mathbb{C} \setminus H_0$ verläuft, schreiben wir

$$h_T(z) = g(z) e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) - g_T(z) e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)$$

$$= u_T(z) - v_T(z)$$

und schätzen die Integrale über u_T und v_T separat ab.

Da g_T ganz ist und damit v_T holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist, kann γ_- für dass Integral über v_T durch jede Kurve mit dem gleichen Anfangs- und Endpunkt ersetzt werden, die in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ homotop zu γ_- ist.

Insbesondere können wir γ_- durch die Kurve γ^* ersetzen, welche den in $\mathbb{C}\setminus H_0$ verlaufenden Rand des Kreises um 0 vom Radius R beschreibt, d.h., $\gamma^* : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$, $\gamma^*(t) = -Re^{it}$. Es gilt also

$$\int_{\gamma_-} \frac{v_T(z)}{z}\,dz = \int_{\gamma^*} \frac{v_T(z)}{z}\,dz$$

Für $x = \operatorname{Re} z < 0$ gilt nun

$$|g_T(z)| = \left|\int_0^T f(t)\, e^{-zt}\right|$$

$$\leq M \cdot \int_0^T e^{-xt}\,dt$$

$$= M\left(\frac{e^{-xT}}{|x|} - \frac{1}{|x|}\right)$$

$$\leq \frac{Me^{-xT}}{|x|}$$

und damit für $x = \operatorname{Re} z < 0$ und $|z| = R$ wie oben

$$\left|\frac{v_T(z)}{z}\right| = |g_T(z)| \cdot \left|e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right|$$

$$\leq \frac{M\cdot e^{-xT}}{|x|} \cdot e^{xT}\,\frac{2|x|}{R^2} = \frac{2M}{R^2}.$$

Dies liefert

$$\left|\int_{\gamma_-} \frac{u_T(z)}{z}\,dz\right| = \left|\int_{\gamma^*} \frac{u_T(z)}{z}\right| \leq \pi \cdot R \cdot \frac{2M}{R^2} = \frac{2\pi M}{R}.$$

Weiterhin existiert eine Konstante $K = K(R,\delta)$ so dass

$$\left| g(z)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| \leq K \qquad \text{für } z \in \partial D(R,\delta).$$

Es folgt, dass

$$\left|\int_{\gamma_-} \frac{u_T(z)}{z}\,dz\right| = \left|\int_{\gamma_-} e^{zT}\, g(z)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\,dz\right|$$

$$\leq K \cdot \int_{\gamma_-} |e^{zT}|\,|dz|$$

Da $|e^{zT}| \leq 1$ und $|e^{zT}| \to 0$ für $T \to \infty$ falls $\operatorname{Re} z < 0$, folgt mit dem Satz über majorisierte Konvergenz, dass

$$\int_{\gamma_-} \frac{u_T(z)}{z}\,dz \to 0 \quad \text{für } T \to \infty.$$

Es existiert also $T_R > 0$ mit

$$\left|\int_{\gamma_-} \frac{u_T(z)}{z}\,dz\right| \leq \frac{2\pi}{R}$$

für $T \geq T_R$.

Insgesamt folgt für $T \geq T_R$, dass

$$|h_T(0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{h_T(z)}{z} dz \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\left| \int_{\gamma+} \frac{h_T(z)}{z} dz \right| + \left| \int_{\gamma_-} \frac{u_T(z)}{z} dz \right| + \left| \int_{\gamma_-} \frac{v_T(z)}{z} dz \right| \right)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi M}{R} + \frac{2\pi}{R} + \frac{2\pi M}{R} \right)$$

$$= \frac{2M+1}{R}.$$

Damit folgt $h_T(0) \to 0$ für $T \to \infty$.

<u>Bemerkung</u>. Sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1. Der Abelsche Grenzwertsatz besagt, dass wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1} f(x).$$

Alfred Tauber zeigte 1897, dass wenn $\lim_{x \to 1} f(x)$ existiert und $a_n = o(1/n)$ gilt, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Die Bedingung $a_n = o(1/n)$ wurde später von Littlewood zu $a_n = O(1/n)$ abgeschwächt. Weitere Verallgemeinerungen dieses Satzes wurden von Hardy und Littlewood gegeben, auf die auch der Name „Taubersche Satz" für Resultate dieses Typs zurückgeht. Anstelle von Reihen kann man dabei auch durch Integrale definierte Funktionen betrachten. Ein Taubersche Satz ist also eine Aussage folgenden Typs:

Sei f in einem Gebiet Ω durch eine Reihe (oder Integral) definiert. Die Funktion f habe eine stetige (oder holomorphe) Fortsetzung in einen Punkt $z_0 \in \partial\Omega$. Außerdem gelte noch ... . Dann konvergiert der f definierende Ausdruck auch in z_0.

Daher ist Satz 3.13 ein Taubersche Satz.

Wir machen noch einige Bemerkungen, in denen der Zusammenhang zwischen den Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und der Verteilung der Primzahlen deutlich wird, insbesondere die Relevanz der Riemannschen Vermutung.

Ohne Beweis halten wir zunächst fest.

Satz 3.14 Die durch $z \mapsto \zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ definierte Funktion ist ganz.

Im Folgenden werden wir auch noch benötigen, dass $|\zeta'/\zeta|$ relativ klein ist. Genauer gilt für $|z|$ groß

$$\left|\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right| \leq (\log|z|)^2$$

außerhalb relativ kleiner Kreise um die Nullstellen.

Für $c \in \mathbb{R}$ und eine auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = c\}$ definierte Funktion betrachten wir das uneigentliche Integral

$$\int_{\operatorname{Re} z = c} g(z)\,dz = \lim_{T_1, T_2 \to \infty} \int_{[c - iT_1, c + iT_2]} g(z)\,dz$$

$$= \lim_{T_1, T_2 \to \infty} i \int_{-T_1}^{T_2} g(c+it)\,dt$$

$$= i \left(\lim_{T_1 \to \infty} \int_{-T_1}^{0} g(c+it)\,dt + \lim_{T_2 \to \infty} \int_{0}^{T_2} g(c+it)\,dt \right).$$

Das folgende Ergebnis ist als Perrons Formel bekannt.

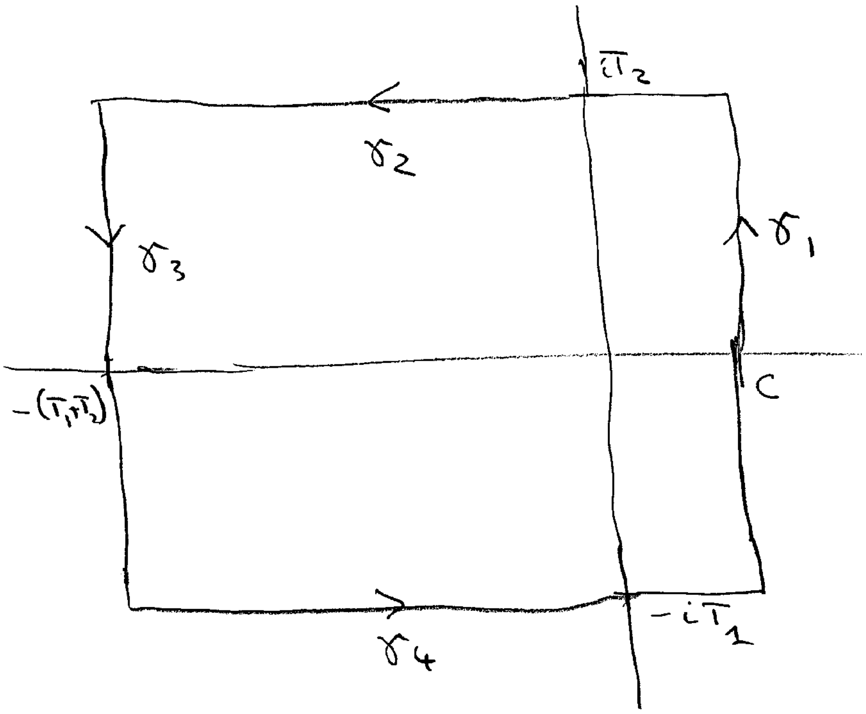
Satz 3.15. Sei $a > 0$, $a \neq 1$, und $c > 0$.

Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{a^z}{z}\,dz = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 < a < 1, \\ 1, & \text{falls } a > 1. \end{cases}$$

Wir geben nur die Beweisidee und überlassen die Details als Übungsaufgabe.

Für $a > 0$ betrachten wir den skizzierten Integrationsweg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.

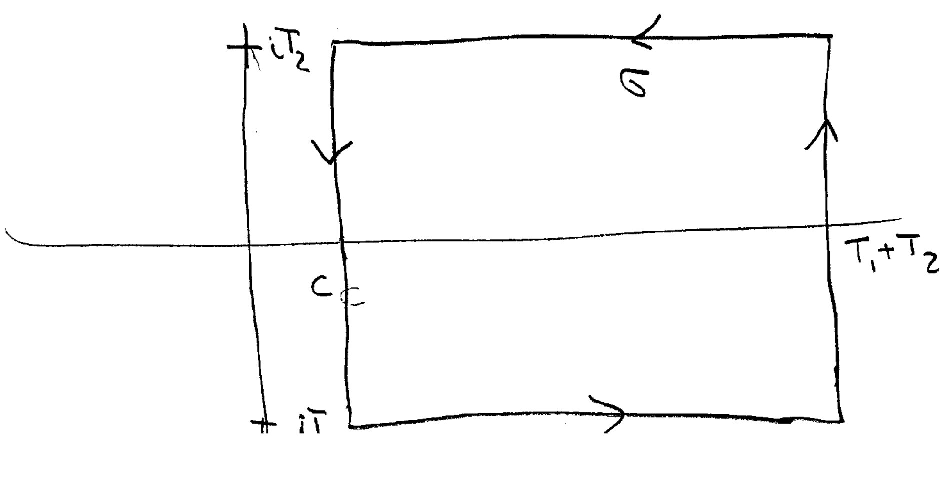


Nach Cauchyscher Integralformel gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{a^z}{z}\,dz = a^0 = 1$$

Die Behauptung folgt nun, wenn $\int_{\gamma_j} \frac{a^z}{z}\,dz \to 0$ für $j \in \{2,3,4\}$ und $T_1, T_2 \to \infty$ gezeigt wird.

Für $0 < a < 1$ betrachtet man analog den skizzierten Integrationsweg σ.



Im Beweis von Lemma 3.11 hatten wir gezeigt, dass

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^z - 1} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \log p \, \frac{p^{-z}}{1-p^{-z}}$$

für $\operatorname{Re} z > 1$. Es folgt, dass

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \log p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p^{-kz}$$

Wir erhalten

<u>Lemma 3.16</u> Für $\operatorname{Re} z > 1$ gilt

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{(p,k)\in\mathbb{P}\times\mathbb{N}} \frac{\log p}{p^{kz}} .$$

Es sei erinnert, dass

$$\phi(z) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^z}$$

nur die Terme mit $k=1$ aufsummiert, und Lemma 3.11 besagt im Wesentlichen, dass der Beitrag der Terme mit $k \geq 2$ klein ist. (Genauer: Der Beitrag dieser Terme konvergiert in $H_{1/2}$.)

Während diese Terme für den Beweis des Primzahlsatzes vernachlässigt werden konnten, betrachten wir jetzt auch sie. Das lässt es naheliegend erscheinen, außer $\Theta : [1,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\Theta(x) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \le x}} \log p$$

auch $\psi : [1,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \sum_{\substack{(p,k) \in \mathbb{P}\times\mathbb{N} \\ p^k \le x}} \log p$$

zu betrachten. Es gilt

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p^k \le x}} \log p$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \le x^{1/k}}} \log p$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Theta(x^{1/k})$$

Dabei ist die Summe nur endlich, denn $\Theta(x^{1/k}) = 0$ falls $x^{1/k} < 2$, d.h., $k > \log x / \log 2$.

Es folgt, mit der Monotonie von Θ, dass

$$\sum_{k=2}^{\infty} \Theta(x^{1/k}) \leq \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor} \Theta(x^{1/k})$$

$$\leq \left(\left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor - 1 \right) \Theta(\sqrt{x})$$

$$\leq \frac{\log x}{\log 2} \Theta(\sqrt{x}),$$

wegen $\Theta(x) = \mathcal{O}(x)$ für $x \to \infty$ also

$$\psi(x) = \Theta(x) + \mathcal{O}(\sqrt{x} \log x).$$

Auch aus dem Verhalten von $\psi(x)$ erhält man damit Information über $\pi(x)$.

Wir wählen $\underbrace{x > 1}_{\text{mit } x \neq p^k \text{ für alle } p \in \mathbb{N} \text{ und } k \in \mathbb{N}}$ und $c > 1$ und erhalten mit Satz 3.15 und Lemma 3.16 folgendes Ergebnis

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z} dz = \sum_{(p,k) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}} \log p \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{x^z}{p^{kz}} dz$$

$$= \sum_{(p,k) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}} \log p \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = c} \left(\frac{x}{p^k} \right)^z dz$$

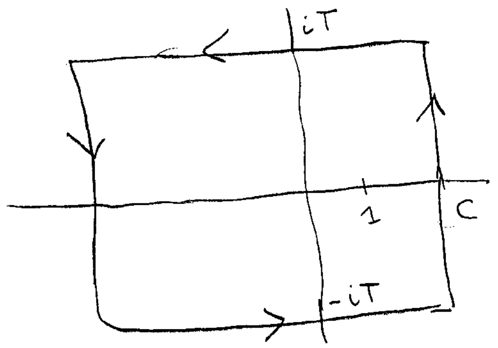
$$= \sum_{\substack{(p,k) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N} \\ p^k < x}} \log p = \psi(x).$$

(Dabei kann die Vertauschung von Integration und Summation durch die absolute Konvergenz gerechtfertigt werden.) Wir erhalten also

<u>Satz 3.17</u> Für $x>1$, $c>1$ gilt

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z}\, dz$$

Wir betrachten nun einen Integrationsweg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ wie im Beweis von Satz 3.15



Man kann zeigen, dass wie dort $\int_{\gamma_j} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z}\, dz$

$\to 0$ für $j = 2,3,4$ und $T \to \infty$.

Nach Residuensatz gilt nun

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z}\, dz = \sum_{\substack{w \in \operatorname{int}(\gamma) \\ w \text{ Pol}}} \operatorname{res}\left(\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z}, w\right)$$

wobei $\operatorname{res}(f, w)$ das Residuum einer meromorphen Funktion f an der Polstelle w bezeichnet.

Die Pole von

$$f(z) = \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z}$$

sind einmal der Nullpunkt, mit Residuum

$$\operatorname{res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z\cdot f(z) = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)},$$

die Polstelle 1 von ζ, mit Residuum

$$\operatorname{res}(f,1) = \lim_{z\to 1} (z-1) f(z)$$

$$= x \cdot \lim_{z\to 1} (z-1) \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -x$$

und die Nullstellen von ζ. Ist ϱ eine m-fache Nullstelle, so gilt

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{m}{z-\varrho} + O(1) \quad \text{für } z \to \varrho$$

und damit

$$\operatorname{res}(f,\varrho) = \lim_{z\to\varrho} (z-\varrho) f(z) = m \cdot \frac{x^\varrho}{\varrho}.$$

Insgesamt erhalten wir folgendes Resultat.

<u>Satz 3.18</u> Für $x > 1$ gilt

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{\varrho \in \mathbb{C} \\ \zeta(\varrho) = 0}} \frac{x^\varrho}{\varrho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}.$$

Die sogenannten trivialen Nullstellen von ζ liegen an den Stellen $-2, -4, -6, \ldots$, d.h. $-2k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Da

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{x^{-2k}}{2k} = -\frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \to 0$$

für $x \to \infty$, reicht es, die sogenannten nichttrivialen Nullstellen zu betrachten, die im „kritischen Streifen" $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ liegen. Wählt man die Kurve γ geschickt (im Wesentlichen $T = X$), so erhält man mit $S_X = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1, |\operatorname{Im} z| < X\}$

Satz 3.19

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{\rho \in S_X \\ \zeta(\rho) = 0}} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(x (\log x)^2\right)$$

Weiter kann man zeigen, dass

$$\sum_{\rho \in S_X} \frac{1}{|\rho|} = O\left((\log x)^2\right)$$

Könnte man zeigen, dass alle Nullstellen Realteil kleiner als α mit einem $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ haben, so würde

$$\left| \sum_{\rho \in S_X} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq \sum_{\rho \in S_X} \frac{x^{\operatorname{Re} \rho}}{|\rho|} = O\left(x^\alpha (\log x)^2\right)$$

für $x \to \infty$ gelten. Dies würde

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\alpha} (\log x)^2\right)$$

implizieren, Falls die Riemannsche Vermutung richtig ist, so folgt dies für $\alpha = \frac{1}{2}$.

Für die Funktion $\pi(x)$ erhält man dann

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + O(x^{\alpha} \log x),$$

wiederum mit $\alpha = \frac{1}{2}$, falls die Riemannsche Vermutung gilt. Man beachte, dass

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{x}{\log x} \qquad \text{für } x \to \infty,$$

wie man beispielsweise mit der Regel von de l'Hospital leicht sieht.