2. Partitionen

Wir haben in Beispiel 2 in Abschnitt 1 gesehen, dass die Koeffizienten c_n der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

angegeben, auf wie viele Arten sich n als Summe mit Summanden aus $\{1,2,3\}$ schreiben lässt. Würde man Summanden aus $\{1,2,\dots,N\}$ mit $N \in \mathbb{N}$ zulassen, so wäre die erzeugende Funktion

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{N} (1-x^k)}$$

Lässt man beliebige Summanden aus $\mathbb{N}$ zu, erhält man als erzeugende Funktion dann

$$F(x) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

Das Produkt konvergiert dabei für $|x|<1$ absolut, da für $|x|<1$ die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ absolut konvergiert.

Für $0<\rho<1$ ist die Konvergenz dabei gleichmäßig für $|x|\le\rho$, und das auch für $x\in\mathbb{C}$. Nach dem Satz von Weierstraß ist durch $z\mapsto\prod_{k=1}^{\infty}(1-z^k)$ definierte Funktion F also holomorph in $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$. Außerdem hat sie keine Nullstellen in $\mathbb{D}$, da $1-z^k\neq 0$ für alle $k\in\mathbb{N}$ und alle $z\in\mathbb{D}$. Damit ist F holomorph und nullstellenfrei in $\mathbb{D}$.

Für $n\in\mathbb{N}$ heißt eine Zerlegung $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$ mit $n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{N}$, $n_1\ge n_2\ge\ldots\ge n_k$, eine Partition von n. Die Anzahl der verschiedenen Partitionen von n bezeichnen wir mit $p(n)$. Die so definierte Funktion $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

heißt Partitionsfunktion. Man beachte, dass $p(n)$ die Partitionen ohne Berücksichtigung der Ordnung zählt, etwa mit der Gleichung $5 = 1+1+3 = 1+3+1 = 3+1+1$ ist nur eine Partition gegeben.

Die obigen Vorüberlegungen liefern folgendes Ergebnis, wenn man noch $p(0) = 1$ setzt.

<u>Satz 2.1</u>. Für $|z| < 1$ gilt

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n .$$

Wir werden später zeigen, dass

$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot n} \quad \text{für } n \to \infty .$$

Zuvor betrachten wir aber zwei Varianten von $p(n)$.

Mit $p_u(n)$ bezeichnen wir die Anzahl der Partitionen in ungerade Summanden und mit $p_v(n)$ bezeichnen wir die Anzahl der Partitionen in verschiedene Summanden. Nach den obigen Überlegungen gilt dann

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^{2k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_u(n) z^n$$

und

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+z^k) = \sum_{n=0}^{\infty} p_v(n) z^n$$

Allgemein gilt für eine Teilmenge M von $\mathbb{N}_0$

$$\prod_{m\in M} \frac{1}{1-z^m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

und

$$\prod_{m\in M} (1+z^m) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n ,$$

wobei a_n die Zahl der Partitionen von n mit Summanden aus M ist und b_n die mit verschiedenen Summanden aus M. (Wir setzen $a_0 = b_0 = 1$, und aber auch $p_u(0) = p_v(0) = 1$.)

Die zweite Identität folgt, da mit $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$

$$\prod_{j=1}^{k} (1+z^{m_j}) = \sum_{A \subset \{m_1, \dots, m_k\}} z^{\sum_{m\in A} m},$$

wobei wir $\sum_{m\in\emptyset} m = 0$ und $z^0 = 1$ setzen.

<u>Satz 2.2</u>. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $p_u(n) = p_v(n)$.

<u>Beweis</u>. Auf Grund der oben angegebenen erzeugenden Funktionen für p_u und p_v reicht es zu zeigen, dass

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^{2k-1}} = \prod_{m=1}^{\infty} (1+z^m)$$

für $|z|<1$. Nun gilt aber

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1+z^m) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1-z^{2m})}{(1-z^m)}$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty} (1-z^{2m}) \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^m}.$$

$$= \left(1\cdot(1-z^2)\cdot 1\cdot(1-z^4)\cdot\ldots\right)\left(\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-z^2}\cdot\frac{1}{1-z^3}\cdot\frac{1}{1-z^4}\cdots\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1-z}\cdot 1\cdot\frac{1}{1-z^3}\cdot 1\cdot\frac{1}{1-z^5}\cdot 1\cdot\ldots\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^{2k-1}},$$

woraus die Behauptung folgt.

Wir beginnen jetzt mit Vorbereitungen für den Beweis der asymptotischen Formel für $p(n)$.

<u>Lemma 2.3</u>. Für $|x|<1$ gilt

$$\log F(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\,\frac{x^j}{1-x^j}.$$

<u>Beweis</u>. Für $|x|<1$ gilt

$$\log\frac{1}{1-x} = -\log(1-x)$$

$$= -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}(-x)^j = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^j}{j}$$

Es folgt

$$\log F(x) = \log\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{1}{1-x^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} x^{kj}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{\infty} x^{kj}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{x^j}{1-x^j}$$

<u>Lemma 2.4</u> Für $0<x<1$ gilt

$$\log F(x) \le \frac{\pi^2}{6} \frac{x}{1-x}.$$

<u>Beweis</u>. Nach der Bernoullischen Ungleichung gilt

$$y^j - 1 \ge j(y-1)$$

für $y>1$ und $j \in \mathbb{N}$. Es folgt, dass

$$\frac{x^j}{1-x^j} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^j - 1} \le \frac{1}{j\left(\frac{1}{x}-1\right)} = \frac{x}{j(1-x)}$$

und damit nach Lemma 2.1, dass

$$\log F(x) \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \frac{x}{1-x} = \frac{\pi^2}{6} \frac{x}{1-x}.$$

Mit Hilfe von Lemma 2.4 lässt sich eine Abschätzung von $p(n)$ nach oben gewinnen, die aber schwächer ist als die erwähnte asymptotische Formel.

<u>Satz 2.5</u> $\quad p(n) \leq e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis</u>. Für $0 < x < 1$ gilt

$$p(n)\, x^n \leq F(x)$$

und damit

$$\begin{aligned}\log p(n) &\leq \log F(x) - n \log x \\ &= \log F(x) + n \log\left(1 + \frac{1-x}{x}\right) \\ &\leq \frac{\pi^2}{6} \frac{x}{1-x} + n \cdot \frac{1-x}{x}\,.\end{aligned}$$

Wir wählen x so, dass die rechte Seite minimal wird. Die Funktion

$$y \longmapsto \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{y} + n \cdot y$$

nimmt ihr Minimum für $y = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ an.

Es folgt

$$\log p(n) \le \frac{\pi^2}{6}\,\frac{\sqrt{6n}}{\pi} + n\cdot\frac{\pi}{\sqrt{6n}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n} = \pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\,.$$

<u>Bemerkung</u>. Mit $y_n = \frac{\pi}{\sqrt{6n}} = \frac{1-x_n}{x_n}$ gilt $x_n \to 1$ und $1 - x_n = x_n y_n \sim \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ für $n \to \infty$.

Mit etwas mehr Aufwand lässt sich die Abschätzung verbessern und man erhält auch Abschätzungen nach unten. Um die genaue Asymptotik von $p(n)$ zu bestimmen, benutzt man komplexe Kurvenintegrale. Grundlegend ist dabei das folgende Resultat, das eine direkte Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel ist.

<u>Lemma 2.6</u>. Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R und sei $0 < r < R \leq \infty$. Dann gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, dz$$

Dabei verstehen wir unter $\int_{|z|=r} g(z)\,dz$ das Integral über die Kurve $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$, mit einer auf $\operatorname{Spur}(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ stetigen Funktion g, also

$$\int_{|z|=r} g(z)\,dz = \int_\gamma g(z)\,dz$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} g(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = i \int_{-\pi}^{\pi} g(re^{it})\,re^{it}\,dt.$$

Die Aussage von Lemma 2.6 lässt sich nun auch direkt beweisen, wenn man Integration und Summation vertauscht und

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imt}\,dt = \begin{cases} 1 & \text{für } m=0, \\ 0 & \text{für } m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \end{cases}$$

benutzt.

Zur Illustration der Methode beweisen wir zunächst folgendes Ergebnis.

<u>Satz 2.7</u> (Stirlingsche Formel)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{für } n\to\infty$$

<u>Beweis</u>. Wegen

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

gilt mit Lemma 2.6 für alle $r>0$

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{e^z}{z^{n+1}}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{re^{it}}}{r^{n+1} e^{i(n+1)t}}\, re^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{re^{it}}}{r^n e^{int}} \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{re^{it} - int} \, dt .$$

Die Entwicklung

$$e^{it} = 1 + it + \tfrac{1}{2}(it)^2 + \tfrac{1}{6}(it)^3 + O(t^4)$$

$$= 1 + it - \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{6} i t^3 + O(t^4),$$

also

$$re^{it} = r + i \cdot rt - \tfrac{1}{2} r t^2 - \tfrac{1}{6} i r t^3 + O(t^4)$$

für $t \to 0$ lässt es sinnvoll erscheinen, $r = n$ zu wählen. Die Entwicklung liefert auch, dass $\delta > 0$ existiert, so dass

$$e^{it} = 1 + it - \tfrac{1}{2} t^2 + R(t) \cdot t^3$$

wobei

$$|R(t)| \leq \tfrac{1}{5} \quad \text{für } |t| \leq \delta .$$

Wir schreiben nun (mit $r = n$ gewählt)

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ne^{it} - int} \, dt = \int_{|t| \leq \delta} e^{ne^{it} - int} \, dt + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} e^{ne^{it} - int} \, dt$$

$$= I_1 + I_2 .$$

Es gilt

$$I_1 = \int_{-\delta}^{\delta} e^{n(1+it-\frac{1}{2}t^2+R(t)t^3)-int}\,dt$$

$$= e^n \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{1}{2}nt^2 + nR(t)\cdot t^3}\,dt$$

$$= e^n \int_{-\sqrt{n}\delta}^{\sqrt{n}\delta} e^{-\frac{1}{2}s^2 + R(s/\sqrt{n})\, s^3/\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\,ds$$

Es folgt

$$\frac{\sqrt{n}}{e^n} I_1 = \int_{-\sqrt{n}\delta}^{\sqrt{n}\delta} e^{-\frac{1}{2}s^2 + R(\frac{s}{\sqrt{n}})\, s^3/\sqrt{n}}\,ds$$

Da für $|s| \leq \sqrt{n}\,\delta$ gilt, dass

$$R(s/\sqrt{n})\frac{s^3}{\sqrt{n}} \leq R(s/\sqrt{n})\cdot \delta s^2 \leq \frac{1}{5}\delta s^2$$

und da wir $\frac{1}{5}\delta < \frac{1}{4}$ annehmen können,

folgt

$$-\frac{1}{2}s^2 + R(\tfrac{s}{\sqrt{n}})\, s^3/\sqrt{n} \leq -\frac{1}{4}s^2,$$

und mit dem Satz über majorisierte Konvergenz erhalten wir

$$\frac{\sqrt{n}}{e^n} I_1 \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2}\,ds = \sqrt{2\pi}.$$

Es folgt

$$I_1 \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} e^n$$

Außerdem gilt

$$|I_2| \leq \int\limits_{\delta \leq |t| \leq \pi} \left| e^{ne^{it} - int} \right| dt$$

$$= \int\limits_{\delta \leq t \leq \pi} e^{n \cdot \operatorname{Re}(e^{it})} dt$$

$$\leq \int\limits_{\delta \leq |t| \leq \pi} e^{n \cdot \cos\delta} dt$$

$$= (2\pi - \delta)\, e^{n \cdot \cos\delta}$$

$$= o(e^n) = o(\sqrt{2\pi n}\, e^n).$$

Insgesamt folgt

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi n^n} (I_1 + I_2)$$

$$\sim \frac{1}{2\pi n^n} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} e^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n$$

und daraus die Behauptung.

Um die Asymptotik von $p(n)$ zu bestimmen, muss F genauer als bisher abgeschätzt werden. Zunächst sei bemerkt, dass die Aussage von Lemma 2.3 auch für $x \in \mathbb{D}$ gilt, wenn man mit $\log F$ den Zweig des Logarithmus bezeichnet, der $\log F(0) = 0$ erfüllt.

Da $F(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{D}$, ist dieser in ganz $\mathbb{D}$ definiert und nach Lemma 2.3 gilt

$$\log F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{z^k}{1-z^k}$$

für $z \in \mathbb{D}$.

Die Funktion $w \mapsto e^{-w}$ bildet die Halbebene $H = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ nach $\mathbb{D}$ ab.

Es folgt für $w \in H$, dass

$$\log F(e^{-w}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{e^{-kw}}{1-e^{-kw}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{e^{kw}-1}.$$

Wir interessieren uns für das Verhalten von $F(z)$ für $z \to 1$, mit $z = e^{-w}$, also für das Verhalten wenn $w \to 0$.

Eine Summe der Form

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} g(k\delta) \quad , \delta \text{ klein}, \ N = \frac{a}{\delta},$$

ist eine Riemannsche Summe für ein Integral

$$\int_0^a \frac{1}{t} g(t)\, dt .$$

Hier können wir aber nicht einfach $g(t) = 1/(e^t - 1)$ wählen, da das Integral bei 0 divergiert. (Das korrespondiert auch dazu, dass wir $F(x) \to \infty$ für $x \to 1$ erwarten.) Außerdem haben wir eine unendliche Reihe. Die Idee ist, $g(t)$ durch $g(t) - h(t)$ mit einer „einfachen" Funktion h zu ersetzen, wobei das Integral $\int_0^\infty (g(t) - h(t))\, dt$ konvergiert.

Die Entwicklung

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + O(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} e^{-t} + O(t)$$

für $t \to 0$ legt nahe, $h(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} e^{-t}$ zu wählen.

Wir schreiben daher

$$\log F(e^{-w}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{e^{kw}-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{kw} - \frac{1}{2}e^{-kw}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{e^{kw}-1} - \frac{1}{kw} + \frac{1}{2}e^{-kw}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{6w} + \frac{1}{2}\log(1-e^{-w}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{e^{kw}-1} - \frac{1}{kw} + \frac{1}{2}e^{-kw}\right)$$

<u>Lemma 2.8</u> Für $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ existiert $M > 0$ so dass

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{e^{kw}-1} - \frac{1}{kw} + \frac{1}{2}e^{-kw}\right) - \int_0^{\infty} \frac{1}{t}\left(\frac{1}{e^{t}-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}e^{-t}\right) dt\right|$$

$$\leq M \cdot |w|$$

für alle $w \in H$ mit $|\arg w| \leq \alpha$ und $|w| \leq 1$.

<u>Lemma 2.9</u>

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t}\left(\frac{1}{e^{t}-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}e^{-t}\right) dt = \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Die Beweise von Lemma 2.8 und 2.9 stellen wir noch zurück.

Mit diesen Lemmata gilt also

$$\log F(e^{-w}) = \frac{\pi^2}{6w} + \frac{1}{2}\log(1-e^{-w}) + \log\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + R_0(w)$$

mit $|R_0(w)| \leq M \cdot |w|$ für $|\arg w| \leq \alpha$, $|w| \leq 1$,

wobei $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $M = M_\alpha$.

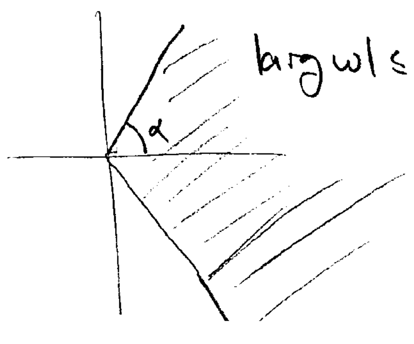
Wir übersetzen die Bedingung $|\arg w| \leq \alpha$ in eine Bedingung für $z = e^{-w}$. Zunächst einmal ist $|\arg w| \leq \alpha$ äquivalent zu $|\operatorname{Im} w| \leq \tan\alpha \cdot \operatorname{Re} w$ und damit zu

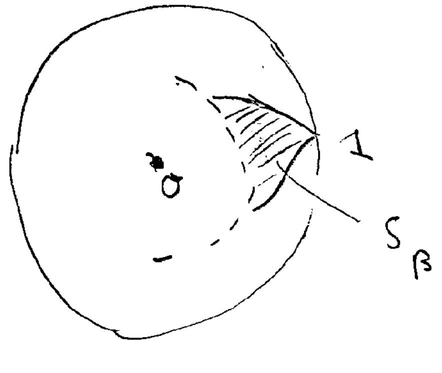
$$|w| = \sqrt{(\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2} \leq \sqrt{(1+\tan^2\alpha)(\operatorname{Re} w)^2} \leq \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \operatorname{Re} w.$$

Wegen $|1-z| = |1-e^{-w}| \sim |w|$ für $w \to 0$ und $1-|z| = 1-e^{-\operatorname{Re} w} \sim \operatorname{Re} w$ für $w \to 0$ ist die Bedingung für w also erfüllt falls $\beta > 0$ und $\delta > 0$ existieren, so dass

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \beta \quad \text{für } |z-1| \leq \delta.$$

Sei $S_\beta = \{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \beta,\ |z| \geq \frac{1}{2} \}$





Da $S_\beta \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \delta\}$ kompakte Teilmenge von $\mathbb{D}$ ist, gilt die obige Abschätzung von $R(w)$ auch für $z = e^{-w} \in S_\beta$, wenn man gegebenenfalls M durch eine größere Konstante ersetzt.

Wir schreiben $z = e^{-w}$ in der Form $w = \log \frac{1}{z}$ $= -\log z$, wobei $\log$ den Hauptwert des Logarithmus bezeichnet. Wegen
$\log z = \log(1 + z - 1) = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \dots$
existiert eine Konstante L mit $|\log z| \leq L \cdot |z-1|$ für $z \in S_\beta$. Es folgt

$$|R_0(w)| \leq M \cdot |w| = M\,|\log z| \leq M \cdot L \cdot |z-1|$$

Das obige Ergebnis über $\log F(e^{-w})$ erhält also in der Variablen z die Form

$$\log F(z) = \frac{\pi^2}{-6\log z} + \frac{1}{2}\log(1-z) + \log\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + R_1(z)$$

wobei $|R_1(z)| \leq M_1 |z-1|$ für $z \in S_\beta$ mit einer nur von β abhängigen Konstante M_1.
Sei $\eta(z) = e^{R_1(z)} - 1$. Dann gilt
$|\eta(z)| \leq K \cdot |z-1|$ für $z \in S_\beta$ mit einer nur von β abhängigen Konstante K.

Wir erhalten folgendes Resultat.

<u>Lemma 2.10</u> Für $z \in S_\beta$ gilt

$$F(z) = \sqrt{\frac{1-z}{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{\pi^2}{-6 \log z}\right)(1+\eta(z))$$

wobei $|\eta(z)| \leq K \cdot |z-1|$.

Nun gilt

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

Wie im Beweis von Satz 2.5 ist es wieder günstig, $r = r_n$ so zu wählen, dass $1 - r_n \sim \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ gilt. Konkret wählen wir $r_n = \exp(-\pi/\sqrt{6n})$. Den Integrationsweg spalten wir dabei auf in den Teil, der in S_β liegt, und in den Teil, der außerhalb S_β liegt. Nun gilt $r_n > \frac{1}{2}$ für großen n und damit $r_n e^{i\theta} \in S_\beta$ für $|\theta| < \theta_n$ wobei

$$\frac{|1 - r_n e^{i\theta_n}|}{1 - r_n} = \beta.$$

Dies liefert

$$\beta^2(1-r_n)^2 = (1-r_n\cos\Theta_n)^2 + r_n^2\sin^2\Theta_n$$

$$= 1 - 2r_n\cos\Theta_n + r_n^2$$

$$= (1-r_n)^2 + 2r_n(1-\cos\Theta_n),$$

also $\quad (\beta^2-1)(1-r_n)^2 = 2r_n(1-\cos\Theta_n)$

Dies ermöglicht eine exakte Berechnung von Θ_n, aber wir benötigen nur das asymptotische Verhalten. Offensichtlich gilt $\Theta_n \to 0$ für $n\to\infty$ und mit

$$\frac{\Theta_n^2}{2} + O(\Theta_n^4) = 1 - \cos\Theta_n$$

$$= (\beta^2-1)\frac{(1-r_n)^2}{2r_n}$$

$$= (\beta^2-1)\frac{\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}} + O(\frac{1}{n})\right)^2}{2 + O(\frac{1}{\sqrt{n}})}$$

folgt $\quad \Theta_n = \gamma\frac{\pi}{\sqrt{n}}\left(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}})\right)$

mit $\gamma = \frac{\beta^2-1}{\sqrt{6}}$. Es gilt also $r_n e^{i\theta} \in S_\beta$

genau dann, wenn $|\theta| \le \Theta_n$.

Wir setzen nun

$$G(z) = \sqrt{\frac{1-z}{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{\pi^2}{-6\log z}\right)$$

und schreiben

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r_n} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

in der Form

$$p(n) = p_1(n) + p_2(n) + p_3(n)$$

mit

$$p_1(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|z|=r_n \\ |\arg z| \le \theta_n}} \frac{G(z)}{z^{n+1}}\, dz \,,$$

$$p_2(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|z|=r_n \\ |\arg z| \le \theta_n}} \frac{F(z)-G(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

und

$$p_3(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|z|=r_n \\ \theta_n \le |\arg z| \le \pi}} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\, dz \,.$$

Weiter setzen wir

$$q(n) = \frac{1}{4\cdot\sqrt{3}\, n} \exp\left(\pi \sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

Wir wollen zeigen

<u>Satz 2.11</u> $p(n) \sim q(n)$ für $n \to \infty$

Der Satz folgt direkt aus den folgenden Lemmata.

<u>Lemma 2.12</u> $p_1(n) \sim q(n)$

<u>Lemma 2.13</u> $p_2(n) = o(q(n))$

<u>Lemma 2.14</u> $p_3(n) = o(q(n))$

<u>Beweis von Lemma 2.12</u> Es gilt

$$p_1(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\theta_n}^{\theta_n} \sqrt{\frac{1-r_n e^{i\theta}}{2\pi}} \exp\left(\frac{\pi^2}{-6\log(r_n e^{i\theta})}\right) \frac{1}{(r_n e^{i\theta})^{n+1}} i r_n e^{i\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\theta_n}^{\theta_n} \sqrt{1-r_n e^{i\theta}} \exp\left(\frac{\pi^2}{-6(\log r_n + i\theta)} - n\log r_n - ni\theta\right) d\theta$$

Mit $y_n = -\log r_n = \pi/\sqrt{6n}$ hat das Argument von exp die Form

$$\frac{\pi^2}{-6(-y_n+i\theta)} + n y_n - n i\theta = \frac{n y_n^2}{y_n - i\theta} + n\cdot y_n - n i\theta$$

$$= n\cdot y_n\left(\frac{y_n}{y_n-i\theta} + 1 - i\frac{\theta}{y_n}\right)$$

$$= n\cdot y_n\left(\frac{1}{1-i\theta/y_n} + 1 - i\frac{\theta}{y_n}\right)$$

$$= n\cdot y_n\left(\frac{1}{1-i\varphi} + 1 - i\varphi\right)$$

wobei $\varphi = \theta/y_n$. Die Bedingung $|\theta| \leq \theta_n$ entspricht jetzt der Bedingung $|\varphi| = \varphi_n$ wobei

$$\varphi_n = \frac{\theta_n}{y_n} \sim \frac{\gamma\,\frac{\pi}{\sqrt{n}}}{\frac{\pi}{\sqrt{6n}}} \to \sqrt{6\gamma},$$

also $\varphi_n \to \sqrt{6\gamma}$. Wegen

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-i\varphi} + 1 - i\varphi\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+i\varphi}{1-\varphi^2} + \right)$$

$$= \frac{1}{1-\varphi^2} + 1 = 2 - \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}$$

folgt damit

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-i\varphi} + 1 - i\varphi\right) \leq 2 - c\cdot\varphi^2$$

mit einer positiven Konstanten c für $|\varphi| \leq \varphi_n$.

Außerdem gilt

$$\frac{1}{1-i\varphi} + 1 - i\varphi = 1 + i\varphi + (i\varphi)^2 + (i\varphi)^3 + \dots + 1 - i\varphi$$

$$= 2 - \varphi^2 - i\varphi^3 + \cdots .$$

Mit $\varphi = \Theta / y_n$ erhalten wir also

$$\frac{\pi^2}{-6(-y_n + i\Theta)} + n \cdot y_n - n i \Theta = 2n \cdot y_n \, g_n(\varphi) ,$$

wobei $\quad g_n(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \mathcal{O}(\varphi^3) \quad$ für $\varphi \to 0$

und $\quad g_n(\varphi) \leq 1 - \frac{c}{2}\varphi^2 \quad$ für $|\varphi| \leq \varphi_n$.

Weiter gilt für $|\Theta| \leq \Theta_n$

$$\sqrt{1 - r_n e^{i\Theta}} = \exp\left(\tfrac{1}{2}\log\left(1 - r_n e^{i\Theta}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\tfrac{1}{2}\log\left((1-r_n)\frac{1 - r_n + r_n - r_n e^{i\Theta}}{1 - r_n}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\tfrac{1}{2}\log(1-r_n) + \tfrac{1}{2}\log\left(1 + \frac{r_n}{1-r_n}(1 - e^{i\Theta})\right)\right)$$

$$= \sqrt{1-r_n}\,\exp\left(\tfrac{1}{2}\log\left(1 + \frac{r_n}{1-r_n}(1 - e^{i\Theta})\right)\right).$$

Mit $\varphi = \Theta / y_n$, also $\Theta = y_n \cdot \varphi$, gilt

$$\frac{r_n}{1-r_n}(1 - e^{i\Theta}) = \frac{r_n}{1-r_n}(1 - e^{i y_n \varphi}) =$$

$$= -i\,\frac{r_n y_n}{1-r_n}\,\varphi + \frac{r}{1-r_n}\,O(y_n^2) \quad \text{für } \varphi \to 0,$$

was wegen $1 - r_n = 1 - e^{-y_n} = y_n + O(y_n^2)$ impliziert, dass

$$\frac{r_n}{1-r_n}\left(1-e^{i\theta}\right) = -i\varphi + O(y_n^2) \quad \text{für } \varphi \to 0.$$

Es folgt, dass

$$\sqrt{1-r_n e^{i\theta}} = \sqrt{1-r_n}\,\exp h_n(\varphi)$$

wobei

$$h_n(\varphi) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{r_n}{1-r_n}\left(1-e^{i\theta}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(1 - i\varphi + O(\varphi^2)\right) = -\frac{1}{2}i\varphi + O(\varphi^2)$$

für $\varphi \to 0$ und

$$|h_n(\varphi)| \le K \quad \text{für } |\varphi| \le \varphi_n$$

mit einer Konstanten K.

Wir erhalten

$$p_1(n) = \frac{\sqrt{1-r_n}}{2\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\theta_n}^{\theta_n} \exp\left(2n\, y_n\, g_n(\theta/y_n) + h_n(\theta/y_n)\right) d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{1-r_n}\;y_n}{2\pi\sqrt{2\pi}}\, e^{2n y_n} \int_{-\varphi_n}^{\varphi_n} e^{2n y_n\left(g_n(\varphi)-1\right) + h_n(\varphi)}\, d\varphi$$

Die Entwicklung $g_n(\varphi) - 1 = -\frac{\varphi^2}{2} + O(\varphi^3)$, also $2n y_n\, g_n(\varphi) \sim -n y_n \varphi^2$, legt die Substitution $t = \sqrt{n y_n}\,\varphi$ nahe.

Wir erhalten mit $t_n = \sqrt{n y_n}\,\varphi_n$

$$p_1(n) = \frac{\sqrt{1-r_n}\, y_n\, e^{2ny_n}}{2\pi\sqrt{2\pi}\,\sqrt{n\cdot y_n}} \int_{-t_n}^{t_n} e^{s_n(t)}\, dt$$

mit

$$s_n(t) = 2n\cdot y_n \left(g_n\!\left(\tfrac{t}{\sqrt{ny_n}}\right) - 1 \right) + h_n\!\left(\tfrac{t}{\sqrt{ny_n}}\right)$$

$$= -2ny_n\left(-\frac{1}{2}\frac{t^2}{ny_n} + O\!\left(\left(\frac{t}{\sqrt{ny_n}}\right)^3\right)\right) + O\!\left(\frac{t}{\sqrt{ny_n}}\right)$$

$$= -t^2 + O\!\left(\frac{t}{\sqrt{ny_n}}\right),$$

also $s_n(t) \to -t^2$ für $n \to \infty$. Die obigen Abschätzungen für g_n und h_n liefern auch

$$s_n(t) \le -\frac{c}{2}t^2 + K \quad \text{für } |t| \le t_n.$$

Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt

$$\int_{-t_n}^{t_n} e^{s_n(t)}\, dt \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi} \quad \text{für } n \to \infty.$$

Mit $1-r_n \sim y_n$ folgt

$$p_1(n) \sim \frac{y_n e^{2ny_n}}{2\pi\sqrt{2\pi}\sqrt{n}}\sqrt{\pi} = \frac{\pi\, e^{2n\pi/\sqrt{6n}}}{\sqrt{6n}\cdot 2\pi\sqrt{2}\sqrt{n}} = \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4\cdot\sqrt{3}\,n}.$$

<u>Beweis von Lemma 2.13</u> Es gilt $F(z) - G(z) = \eta(z)G(z)$ wobei $|\eta(z)| \le K\cdot|z-1|$ für $z \in S_\beta$. Für $z = r_n e^{i\theta} \in S_\beta$ gilt, wie im Beweis des vorigen Lemmas gezeigt, $|z-1| \le K'(1-r_n)$ mit einer Konstanten K'. Es folgt, dass $|\eta(z)| = O(1-r_n)$ und wie im vorigen Beweis dann

$$p_2(n) = p_1(n)\cdot O(1-r_n) = o(p_1(n)).$$

Beweis von Lemma 2.14. Nach Lemma 2.3 und 2.4 gilt

$$\left| \log F(z) - \frac{1}{1-z} \right| = \left| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{z^j}{1-z^j} \right|$$

$$\leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{|z|^j}{1-|z|^j}$$

$$= \log F(|z|) - \frac{1}{1-|z|}$$

$$\leq \frac{\pi^2}{6} \frac{|z|}{1-|z|} - \frac{1}{1-|z|}$$

$$\leq \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) \frac{1}{1-|z|} .$$

Für $z \notin S_\beta$ gilt $|1-z| > \beta(1-|z|)$, also

$$\log |F(z)| = \mathrm{Re}\left(\log F(z)\right)$$

$$\leq |\log F(z)|$$

$$\leq \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) \frac{1}{1-|z|} + \left| \frac{1}{1-z} \right|$$

$$\leq \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{1}{1-|z|}$$

Wählt man $\beta = 3$, erhält man

$$\log |F(z)| \leq \frac{1}{1-|z|} \quad \text{für } z \notin S_3 .$$

Es folgt, dass

$$p_3(n) \leq \exp\left(\frac{1}{1-r_n}\right)$$

$$= \exp\left((1+o(1))\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= o\left(p_1(n)\right). \qquad \square$$

Zu zeigen bleiben Lemma 2.8 und 2.9.

Lemma 2.8 folgt dabei leicht aus dem folgenden Resultat, dessen Beweis als Übung überlassen sei.

<u>Lemma 2.15</u>. Sei $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ stetig differenzierbar, $N\in\mathbb{N}$ und $\delta>0$, so gilt

$$\left|\int_0^{N\delta} f(t)\,dt - \delta\sum_{j=1}^{N} f(\delta j)\right| \leq \delta\int_0^{N\delta} |f'(t)|\,dt .$$

Dies gilt auch für $N=\infty$ (mit $N\delta=\infty$), falls die Integrale existieren.

Zum Beweis von Lemma 2.8 schreiben wir nun $w=|w|\cdot v$ mit $|v|=1$ und setzen

$$f_v(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{e^{vt}-1} - \frac{1}{vt} + \frac{1}{2}e^{-vt}\right)$$

Dann existiert zu $\alpha \in (0, \pi/2)$ eine Konstante $M > 0$ mit

$$\int_0^\infty |f_v'(t)|\, dt \leq M.$$

Da außerdem

$$\int_0^\infty f_v(t)\, dt = \int_0^\infty f_0(t)\, dt$$

nach Substitutionsregel, folgt die Behauptung von Lemma 2.8 nun aus Lemma 2.15.

<u>Beweis von Lemma 2.9</u>. Sei I das zu berechnende Integral. Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz gilt

$$I = \lim_{N\to\infty} \int_0^\infty (1-e^{-Nx})\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{2}\right)\frac{1}{x}\, dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(A_N + B_N \right)$$

mit

$$A_N = \int_0^\infty (1-e^{-Nx})\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\, dx$$

und

$$B_N = \int_0^\infty (1-e^{-Nx})\,\frac{e^{-x}}{2x}\, dx .$$

Nun gilt

$$\frac{1-e^{-Nx}}{e^x-1} = \frac{1}{e^x}\cdot\frac{1-e^{-Nx}}{1-e^{-x}}$$

$$= \frac{1}{e^x}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-kx} = \sum_{k=1}^{N} e^{-kx}$$

also

$$(1-e^{-Nx})\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=1}^{N} e^{-kx} - \frac{1}{x}(1-e^{-Nx})$$

$$= \sum_{k=1}^{N} e^{-kx} - \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{N}\left(e^{-(k-1)x}-e^{-kx}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} e^{-kx} - \sum_{k=1}^{N} e^{-kx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} e^{-kx}\left(1-\frac{e^x-1}{x}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} e^{-kx}\,\frac{1+x-e^x}{x}$$

Also

$$A_N = \sum_{k=1}^{N}\int_0^\infty e^{-kx}\,\frac{1+x-e^x}{x^2}\,dx\,.$$

Eine Rechnung zeigt nun, dass

$$\frac{1+x-e^x}{x^2} = -\int_0^1 t\,e^{(1-t)x}\,dt$$

Mit Fubini erhält man

$$A_N = -\sum_{k=1}^{N} \int_0^1 \int_0^\infty e^{-kx}\, t\, e^{(1-t)x}\, dx\, dt$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} \int_0^1 \frac{t}{k+t-1}\, dt$$

$$= -1 + \sum_{k=2}^{N} \left((k-1) \log \frac{k}{k-1} - 1 \right)$$

$$= -N + \sum_{k=2}^{N} \left((k-1) \log k - (k-1) \log(k-1) \right)$$

$$= -N + \sum_{k=2}^{N} (k-1) \log k - \sum_{k=1}^{N-1} k \log k$$

$$= -N + (N-1) \log N - \sum_{k=2}^{N-1} \log k$$

$$= -N + N \cdot \log N - \sum_{k=2}^{N} \log k .$$

$$= -N + N \cdot \log N - \log(N!)$$

Deswegen gilt

$$(1-e^{-Nx}) \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^{-x} - e^{-(N+1)x}}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{N+1} e^{-sx}\, dx$$

und wiederum mit Fubini

$$B_N = \frac{1}{2} \int_1^{N+1} \int_0^\infty e^{-sx}\, dx\, ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{N+1} \frac{1}{s}\, ds$$

$$= \frac{1}{2} \log (N+1)$$

Damit folgt

$$A_N + B_N = N \log N - N - \log(N!) + \frac{1}{2} \log(N+1)$$

$$= \log\left(\frac{N^N \sqrt{N+1}}{e^N \cdot N!} \right)$$

$$= \log\left(\left(\frac{N}{e}\right)^N \frac{\sqrt{N}}{N!} \right) + \log\left(\sqrt{\frac{N+1}{N}} \right)$$

$$\to \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

nach Stirlings Formel.

<u>Bem.</u> Beim Beweis der Stirlingschen Formel (oder wie auch beim Beweis von Satz 2.11 (der Asymptotik für $p(n)$) haben wir in einem Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{e^{g(z)}}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(g(re^{i\theta}) - n\log r - ni\theta\right)d\theta$$

den Radius r „geeignet" gewählt.

Entscheidend ist, r so zu wählen, dass r kritischer Punkt von $h(z) = \frac{e^{g(z)}}{z^n}$ ist, also $h'(r) = 0$ gilt. Denn dann gilt

$$0 = h'(r) = e^{g(r)}\left(\frac{g'(r)}{r^n} - \frac{n}{r^{n+1}}\right),$$

also $g'(r) = \frac{n}{r}$, und folglich

$$g(re^{i\theta}) = g(r) + g'(r)(re^{i\theta} - r) + O(\theta^2)$$
$$= g(r) + n(e^{i\theta} - 1) + O(\theta^2)$$
$$= g(r) + ni\theta + O(\theta^2)$$

Der Punkt $z_0 = r$ ist ein Sattelpunkt der Funktion $z \mapsto h(z)$. Man nennt die angewandte Methode auch Sattelpunktmethode.

Genauer gilt sogar

$$g(re^{i\theta}) = g(r) + g'(r)\, r(e^{i\theta}-1) + \frac{1}{2} g''(r) r^2 (e^{i\theta}-1)^2 + O(\theta^3)$$

$$= g(r) + n i\theta - \frac{1}{2} n\,\theta^2 - \frac{1}{2} g''(r) r^2 \theta^2 + O(\theta^3)$$

$$= g(r) + n i\theta - \frac{1}{2}\left(n + g''(r) r^2\right)\cdot\theta^2 + O(\theta^3)$$

Das Integral ist dann, unter recht allgemeinen Voraussetzungen, mit $r=r_n$ asymptotisch gleich zu

$$\frac{1}{2\pi}\frac{e^{g(r_n)}}{r_n^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(n+g''(r_n)r_n^2)\cdot t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{g(r_n)}}{r_n^n}\sqrt{\frac{2}{n+g''(r_n)r_n^2}}\,\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{e^{g(r_n)}}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{n+g''(r_n)\cdot r_n^2}\;\,r_n^n}$$

$$= \frac{e^{g(r_n)}}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{r_n g'(r_n)+g''(r_n)\,r_n^2}\cdot r_n^n}$$

Für die genauen Voraussetzungen, die benötigt werden, siehe eine Arbeit von W.K. Hayman, A generalisation of Stirling's formula, J. Reine Angew. Math. 196 (1956), 67–95.