# Analytische Zahlentheorie

Vorlesung Sommersemester 2013

Walter Bergweiler

## Inhalt

1. Erzeugende Funktionen

2. Partionen

3. Primzahlen

## Überblick

In der analytischen Zahlentheorie behandelt man zahlentheoretische Fragestellungen mit Methoden der Analysis.

In Abschnitt 1 untersuchen wir den Zusammenhang zwischen einer Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq 0}$ und der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, die man erzeugende Funktion der Folge nennt. Wir betrachten hier verschiedene Beispiele, beginnend mit den Fibonaccizahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

In Abschnitt 2 untersuchen wir, auf wie viele Arten sich eine natürliche Zahl $n$ als Summe kleinerer natürlicher Zahlen schreiben lässt. Für die Anzahl $p(n)$ dieser „Partitionen" zeigen wir

$$p(n) \sim \frac{1}{4 \cdot \sqrt{3}\, n} e^{\pi \sqrt{2n/3}}$$

für $n \to \infty$, wobei wir $a_n \sim b_n$ schreiben falls $a_n / b_n \to 1$. Der Beweis benutzt das asymptotische Verhalten der zugehörigen erzeugenden Funktion.

In Abschnitt 3 untersuchen wir Primzahlen und insbesondere die Anzahl $\pi(n)$ der Primzahlen kleiner oder gleich $n$. Insbesondere beweisen wir den Primzahlsatz, der besagt, dass

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$$

für $n \to \infty$.

Zum Verständnis von Abschnitt 1 genügen Analysis I und II. In den folgenden Abschnitten werden aber auch Ergebnisse der Analysis III benötigt (etwa der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz). Außerdem werden dort auch Kenntnisse der Analysis IV benötigt. In Abschnitt 2 reichen dabei Grundkenntnisse, aber im zweiten Teil von Abschnitt 3 sind fortgeschrittene Kenntnisse erforderlich.

Grundlage der Vorlesung ist großenteils das Buch

- D. J. Newman: Analytic Number Theory, Springer,

in Abschnitt 3 vor allem Kapitel 7 des Buchs

- Peter D. Lax, Lawrence Zalcman: Complex Proofs of Real Theorems, American Mathematical Society, 2012.

Eine Ausarbeitung davon ist die Bachelorarbeit

- Christoph Gerken: Ein Beweis des Primzahlsatzes, Kiel 2012

Weitere benutzte Quellen sind

- Barry Simon, Handout zur Vorlesung „Complex Analysis" (am Ende von Abschnitt 2)

- J. Brüdern: Analytische Zahlentheorie, Springer (am Anfang von Abschnitt 3)

- A. Granville: Lecture Notes zur Vorlesung „Analytic Number Theory" (am Ende von Abschnitt 3)

# Analytische Zahlentheorie

Vorlesung SoSe 2013

W. Bergweiler

## 1. Erzeugende Funktionen

Anstelle einer Definition, was analytische Zahlentheorie ist, beginnen wir mit einem Beispiel.

Die Fibonacci-Folge $(F_n)_{n\geq 0}$ ist rekursiv definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$.

Es gilt also $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, usw.

Wir betrachten, ohne uns Gedanken über die Konvergenz zu machen, die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot x^n .$$

Es gilt dann

$$x f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^n$$

und

$$x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n$$

Hieraus folgt

$$(1-x-x^2) f(x) = f(x) - x f(x) - x^2 f(x)$$

$$= F_0 + F_1 x - F_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{(F_n - F_{n-1} - F_{n-2})}_{=0} x^n$$

$$= x$$

War die bisherige Rechnung formal, so sieht man nun umgekehrt, dass bei der durch

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

definierten Funktion die Koeffizienten der Potenzreihe durch die Fibonacci-Zahlen gegeben sind.

Nun gilt

$$1-x-x^2 = -(x-a)(x-b)$$

mit

$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

und damit hat $f$ eine Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b}$$

Es folgt, dass für $|x| < \min\{|a|, |b|\}$

$$f(x) = -\frac{\alpha}{a} \frac{1}{1-\frac{x}{a}} - \frac{\beta}{b} \frac{1}{1-\frac{x}{b}}$$

$$= -\frac{\alpha}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n - \frac{\beta}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{b}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\alpha}{a^{n+1}} - \frac{\beta}{b^{n+1}}\right) x^n ,$$

also

$$F_n = -\frac{\alpha}{a} \cdot \frac{1}{a^n} - \frac{\beta}{b} \cdot \frac{1}{b^n}$$

Wir berechnen $\alpha$ und $\beta$:

$$\alpha = \lim_{x \to a} (x-a) f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x}{-(x-b)} = \frac{a}{-(a-b)}$$

$$= \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{-\sqrt{5}} = -\frac{a}{\sqrt{5}} , \quad \text{also} \quad \frac{\alpha}{a} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

und

$$\beta = \lim_{x \to b} (x-b) f(x) = \frac{b}{-(b-a)}$$

$$= \frac{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{b}{\sqrt{5}} , \quad \text{also} \quad \frac{\beta}{b} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Außerdem gilt

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

und

$$\frac{1}{b} = \frac{-2}{\sqrt{5}+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Es folgt

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{a}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{b}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right)$$

Diese Formel für $F_n$ wird nach Moivre und Binet benannt.

Ist die Formel einmal bekannt, so lässt sie sich auch leicht durch vollständige Induktion beweisen.

Aber ohne analytische Hilfsmittel wie die Funktion $f$ ist sie schwer zu finden. Interessant ist auch, dass die Formel für die ganzen Zahlen $F_n$ die irrationale Zahl $\sqrt{5}$ beinhaltet.

<u>Def. 1.1</u>. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ Folge reeller (oder komplexer) Zahlen. Dann heißt die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

erzeugende Funktion von $(a_n)$.

Die Strategie ist, aus analytischen Eigenschaften von $f$ Information über $(a_n)$ bekommen. Im Allgemeinen wird man keine explizite Formel für $(a_n)$ bekommen wie im Fall der Fibonacci-Zahlen, aber Information über das asymptotische Verhalten der $a_n$. Im Falle der Fibonacci-Zahlen gilt etwa für den Radius $r$ der Potenzreihe von $f$, dass

$$r = \min\{|a|, |b|\} = |a| = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

wegen

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{F_n}$$

für gegebenes $\varepsilon > 0$ also

$$F_n \leq \left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right)^n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \varepsilon\right)^n$$

für große $n$.

Weitere Beispiele:

1) Sei $m \in \mathbb{N}$ und

$$f(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^m$$

$$= \sum_{n=m}^{6m} p_{n,m} \, x^n$$

Es gilt

$$f(x) = \left(\sum_{i_1=1}^{6} x^{i_1}\right)\left(\sum_{i_2=1}^{6} x^{i_2}\right) \cdots \left(\sum_{i_m=1}^{6} x^{i_m}\right)$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_m = 1}^{6} x^{i_1 + i_2 + \dots + i_m}$$

Es folgt, dass

$$p_{n,m} = \operatorname{card} \left\{ (i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, 6\}^m : \sum_{j=1}^{m} i_j = n \right\},$$

wobei $\operatorname{card} X$ die Kardinalität (= Anzahl der Elemente) einer endlichen Menge ist.

Damit ist $p_{n,m}$ genau die Anzahl der Möglichkeiten, bei $m$-maligem Würfeln die Augenzahl $n$ zu erreichen.

Wir betrachten nun eine etwas kuriose Anwendung dieser Idee:

Es gilt

$$x+x^2+\dots+x^6 = x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

und damit

$$(x+x^2+\dots+x^6)^2 = \left[x\cdot(x+1)(x^2+x+1)\right]\cdot\left[x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2\right]$$

$$=(x+2x^2+2x^3+x^4)\cdot(x+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8).$$

Die Interpretation dieser Gleichung ist Folgende:

Wir beschriften einen Würfel mit den Zahlen 1, zweimal 2, zweimal 3 und einmal 4 (überkleben also die 5 und 6 durch eine 2 und eine 3) und wir beschriften einen zweiten Würfel mit den Zahlen 1, 3, 4, 5, 6 und 8 (überkleben also die 2 mit einer 8).

Dann ist die Anzahl der Möglichkeiten (und damit die Wahrscheinlichkeit), mit diesen beiden Würfeln $n$ Augen zu erzielen, genauso groß wie bei einem Paar gewöhnlicher Würfel – und zwar für jedes $n$.

2) Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen gegebenen Geldbetrag in Münzen zu zerteilen?
Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass es Münzen nur zu 1, 2 und 3 Cent gibt, aber die Methode lässt sich auf den allgemeinen Fall erweitern.
Die erzeugende Funktion ist hier

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)},$$

denn es gilt (für $|x|<1$)

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} x^{2l}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^{3m}\right)$$

$$= \sum_{k,l,m=0}^{\infty} x^{k+2l+3m}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n ,$$

wobei

$$c_n = \operatorname{card}\{ (k,l,m) \in \mathbb{N}_0^3 : k + 2l + 3m = n \}$$

die gesuchte Anzahl ist.

Es gilt

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^3 (1+x)(1+x+x^2)}$$

und durch Partialbruchzerlegung und geeignete Zusammenfassung der Terme mit einfachen Polen erhält man

$$f(x) = \frac{1}{6} \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{(1-x^2)} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1-x^3)}$$

Wegen
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

und
$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{(1-x)^2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n$$

folgt dann

$$c_n = \frac{(n+2)(n+1)}{12} + \frac{n+1}{4} + \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{falls } 2|n \text{ und } 3\nmid n \\ \frac{1}{3}, & \text{falls } 3|n \text{ und } 2\nmid n \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{3} & \text{falls } 6|n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Dabei bedeutet $m|n$ für $m,n \in \mathbb{Z}$, dass $m$ Teiler von $n$ ist, das heißt, $n = p \cdot m$ mit $p \in \mathbb{Z}$.)

Wegen

$$\frac{(n+2)(n+1)}{12} + \frac{n+1}{4} = \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + \frac{5}{12}$$

und $c_n \in \mathbb{N}$ lässt sich dies auch in der Form

$$c_n = \left\lfloor \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + 1 \right\rfloor$$

oder

$$c_n = \left\lceil \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + \frac{5}{12} \right\rceil$$

schreiben, wobei $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$ und $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \ge x\}$ die obere und untere Gaußklammer sind.

Hat man $k$ Münzen mit den Werten $w_1, \dots, w_k$, so betrachtet man stattdessen

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^{w_1})(1-x^{w_2})\dots(1-x^{w_k})}$$

Es ist im Allgemeinen hoffnungslos, jetzt eine explizite Partialbruchzerlegung anzugeben. Aber es gibt eine solche, und nimmt man $w_1 = 1$ an, so hat der Nenner eine $k$-fache Nullstelle in 1 und alle anderen Nullstellen haben Ordnung kleiner als $k$. Sind $x_1 = 1$, $x_2, \dots, x_t$ die Nullstellen, (möglicherweise komplex), so erhält man eine Darstellung

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_{1j}}{(1-x)^k} + \sum_{s=2}^{t} \sum_{j=1}^{m_j} \frac{\beta_{sj}}{(1-\frac{x}{x_s})^j}$$

mit gewissen $\beta_{sj} \in \mathbb{C}$ und $m_j \in \mathbb{N}$, $m_j \leq k-1$.

Nun gilt für $|y|<1$

$$\frac{1}{(1-y)^j} = \frac{d^{j-1}}{dy^{j-1}}\left(\frac{1}{1-y}\right) = \frac{1}{(j-1)!}\sum_{n=0}^{\infty}(n+j)(n+j-1)\dots(n+1)\,y^n,$$

also

$$c_n = \frac{\beta_{1k}}{(k-1)!}(n+k)(n+k-1)\cdot\ldots\cdot(n+1) \quad + d_n \quad ,$$

wobei $d_n$ eine Summe aus Termen der Form

$$\frac{\beta_{sj}}{(j-1)!}(n+j)(n+j-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)\left(\frac{1}{x_s}\right)^n$$

mit $j \leq k-1$ ist. Wegen $|x_s| = 1$ für alle $s$ folgt

$$|d_n| \leq A \cdot n^{k-1}$$

mit einer Konstanten $A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir erhalten

$$c_n = \frac{\beta_{1k}}{(k-1)!} n^k + e_n \qquad \text{mit } |e_n| \leq B \cdot n^{k-1} ,$$

mit einer Konstanten $B$.

Dabei ist

$$\beta_{1k} = \lim_{x \to 1} (1-x)^k f(x)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(1-x)\,(1-x)\cdot\ldots\cdot(1-x)}{(1-x^{\omega_1})(1-x^{\omega_2})\cdot\ldots\cdot(1-x^{\omega_k})}$$

Da nach der Regel von l'Hôpital

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-x^{\omega}} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{-\omega x^{\omega-1}} = \frac{1}{\omega} \quad \text{für } \omega\in\mathbb{R},$$

folgt

$$\beta_{1k} = \frac{1}{\omega_1\cdot\omega_2\cdot\ldots\cdot\omega_k}.$$

Insgesamt erhält man

$$c_n = \frac{1}{\omega_1\cdot\ldots\cdot\omega_k\cdot(k-1)!}\, n^k + e_n,$$

wobei $|e_n| \le B\cdot n^{k-1}$.

Mit den Landau-Symbolen schreibt man dies auch als

$$c_n = \frac{1}{\omega_1\cdot\omega_2\cdot\ldots\cdot\omega_k\cdot(k-1)!}\, n^k + O(n^{k-1}) \quad \text{für } n\to\infty.$$

Desweiteren benutzen wir für Zahlenfolgen $(a_k)$ und $(b_k)$ in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ die Notation

$$a_k \sim b_k \ (\text{für } k\to\infty) \ :\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1.$$

Damit erhält man aus Obigem

$$c_n \sim \frac{1}{\omega_1\cdot\omega_2\cdot\ldots\cdot\omega_k}\, n^{k-1} \quad \text{für } n\to\infty.$$

3) Wir betrachten folgende Frage:
Existiert eine Zerlegung von $\mathbb{N}_0$ in disjunkte Teilmengen $A$ und $B$ so dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\operatorname{card}\{(a,a') \in A^2 : a+a'=n, a \neq a'\}$$
$$= \operatorname{card}\{(b,b') \in B^2 : b+b'=n, b \neq b'\}$$

Nehmen wir einmal an, dass so eine Zerlegung existiert. Sei etwa $0 \in A$.
Dann muss $1 \in B$ gelten, da sonst $1 = 0+1$ eine Zerlegung in Elemente von $A$ hätte, aber keine solche Zerlegung in $B$.
Ebenso folgt $2 \in B$, da sonst $2 = 0+2 = a+a'$, aber keine entsprechende Zerlegung in $B$ existierte. Weiter gilt $3 \in A$, $4 \in B$, $5 \in A$, $6 \in A$, ...
Aber es ist unklar, wie es weitergeht.

Wir setzen

$$f(x) = \sum_{n \in A} x^n \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{n \in B} x^n .$$

Dann gilt (für $|x|<1$)

$$f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Mit $c_n := \mathrm{Card}\{(u,u') \in A^2 : u+u'=n,\ u \neq u'\}$

gilt

$$f(x)^2 - f(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n .$$

Es folgt

$$f(x)^2 - f(x^2) = g(x)^2 - g(x^2)$$

Dies liefert

$$f(x^2) - g(x^2) = f(x)^2 - g(x)^2$$

$$= (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))$$

$$= (f(x)-g(x)) \frac{1}{1-x} ,$$

also

$$f(x)-g(x) = (1-x)(f(x^2)-g(x^2))$$

Hieraus erhält man induktiv

$$f(x)-g(x) = (1-x)(1-x^2)(f(x^4)-g(x^4))$$

$$= \left(\prod_{m=0}^{n} (1-x^{2^m})\right) \cdot \left(f(x^{2^{n+1}}) - g(x^{2^{n+1}})\right)$$

Nun gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x^{2^{n+1}}) = \lim_{y\to 0} f(y) = f(0) = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} g(x^{2^{n+1}}) = g(0) = 0 .$$

Wir erhalten

$$f(x) - g(x) = \lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{n} (1 - x^{2^m})$$

Nun gilt (Übung): Jedes $k \in \mathbb{N}$ hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$k = \sum_{i=1}^{j_k} 2^{p_i}$$

mit verschiedenen $p_1, \dots, p_{j_k} \in \mathbb{N}_0$.

Ausmultiplizieren zeigt

$$\prod_{m=0}^{n} (1 - x^{2^m}) = \sum_{\substack{j_k \le n \\ j_k \text{ gerade}}} x^k - \sum_{\substack{j_k \le n \\ j_k \text{ ungerade}}} x^k$$

(Dabei haben wir $j_0 = 0$ gesetzt, konsistent mit der Konvention $\sum_{i=1}^{0} \dots = 0$.)

Es folgt:

$A = \{k \in \mathbb{N}_0 : j_k \text{ gerade}\}$, $B = \{k \in \mathbb{N}_0 : j_k \text{ ungerade}\}$

leisten das Verlangte.

Darüberhinaus folgt: A und B sind, bis auf Vertauschung, die einzigen Mengen mit dieser Eigenschaft. Die Zahl $j_k$ ist die Zahl der Einsen in der Binärdarstellung von $k$.

<u>Exkurs über unendliche Produkte</u>

Oben haben wir einen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{m=0}^{n} p_m$ behauptet. Es wäre naheliegend, in Analogie mit unendlichen Reihen unendliche Produkte durch

$\prod\limits_{m=0}^{\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{m=0}^{n} p_n$ zu definieren,

falls der Grenzwert existiert. Gilt aber z.B. $p_m = \frac{1}{2}$ für alle $m$, so

folgt $\lim\limits_{m\to\infty} \prod\limits_{m=0}^{n} \frac{1}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$.

Das Produkt wäre 0, aber kein Faktor ist 0. Daher geht man wie folgt vor:

**Def.** Sei $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Zahlenfolge. Das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} p_k$ heißt konvergent, falls $N\in\mathbb{N}$ existiert, so dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=N}^{n} p_k$$

existiert und von Null verschieden ist.

Man setzt dann

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_{N-1} \lim_{n\to\infty}\prod_{k=N}^{n} p_k .$$

Es folgt dann, dass $p_k \neq 0$ für $k\geq N$ und $\prod_{k=1}^{\infty} p_k = 0$ gilt genau dann, wenn ein $k\in\mathbb{N}$ (genauer $k\in\{1,\ldots,N\}$) existiert mit $p_k=0$.

Analog zu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent } \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

bei Reihen zeigt man hier

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k \text{ konvergiert } \Rightarrow \lim_{k\to\infty} p_k = 1 .$$

Die Umkehrung gilt wieder nicht, wie zum Beispiel $p_k = \frac{k-1}{k}$ oder $p_k = \frac{k+1}{k}$ zeigen.

Wegen $\lim_{k\to\infty} p_k = 1$ im Konvergenzfalle schreibt man die $p_k$ oft in der Form $p_k = 1 + a_k$, betrachtet also Produkte der Form $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$.

<u>Def.</u> Ein unendliches Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k)$ heißt absolut konvergent, falls $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + |a_k|)$ konvergiert.

Es gilt dann (in Analogie zu Reihen)

<u>Satz</u> Absolut konvergente Produkte sind konvergent.

<u>Beweisskizze</u>. Für $n > m > N$ gilt

$$\left| \prod_{k=N}^{n} (1+a_k) - \prod_{k=N}^{m} (1+a_k) \right|$$

$$= \left| \sum_{(k_1, \ldots, k_\ell) \in X} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_\ell} \right|$$

$$= \sum_{(k_1,\dots,k_e)\in X} |a_{k_1}|\cdot|a_{k_2}|\cdot\ldots\cdot|a_{k_e}|$$

$$= \prod_{k=N}^{n}(1+|a_k|) - \prod_{k=N}^{m}(1+|a_k|)$$

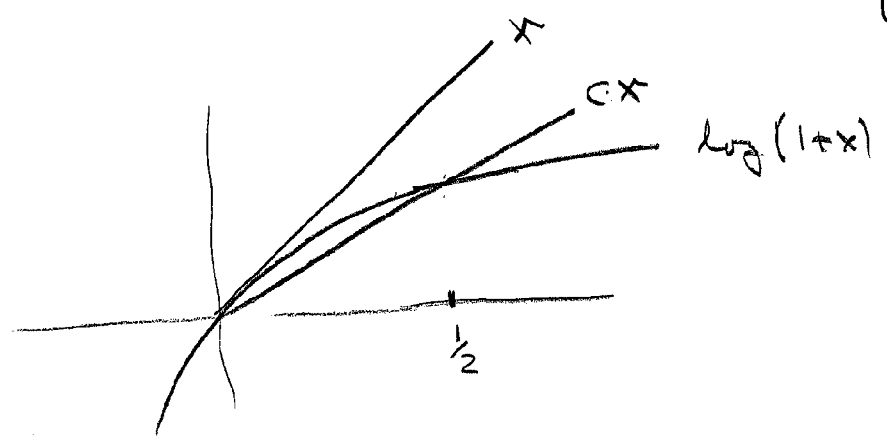
mit einer gewissen Menge $X$ von Multiindices. Die Behauptung folgt aus dem Cauchy-Kriterium.

<u>Satz</u>. Das unendliche Produkt $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ konvergiert genau dann absolut, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert.

<u>Beweis</u>. Wir können $a_k \geq 0$ annehmen. Konvergiert Produkt oder Reihe, so gilt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Wir dürfen also annehmen, dass dies gilt. Damit existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a_k \leq \frac{1}{2}$ für $k \geq 2$. Nun gilt

$$c\cdot x \leq \log(1+x) \leq x$$

für $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ mit einer positiven Konstanten $c$.




Man kann $c = \frac{\log\frac{3}{2}}{2}$ wählen (siehe Skizze), aber das wird nicht benötigt.

Es folgt

$$c \cdot \sum_{k=N}^{n} a_k \leq \sum_{k=N}^{n} \log(1+a_k)$$

$$= \log\left(\prod_{k=N}^{n}(1+a_k)\right)$$

$$\leq \sum_{k=N}^{n} a_k$$

für $n \geq N$, und daraus die Behauptung mit dem Majorantenkriterium.

Wie bei unendlichen Reihen zeigt man:

<u>Satz</u> Absolut konvergente unendliche Produkte konvergieren auch bei Umordnung der Faktoren, und zwar zum gleichen Wert