Übungen zu Analysis mit Maple
Serie 9

1. Faktorieren Sie das Polynom

$$p(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 4$$

über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ sowie geeigneten Erweiterungskörpern von $\mathbb{Q}$.

2. Sei $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ und sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \arctan(x - y) - \ln(1 + x^2 + y^2).$$

Plotten Sie den Graph von f zusammen mit seiner Tangentialebene im Punkte $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Bemerkung: Wie Sie aus Analysis II wissen (sollten), ist die Tangentialebene durch die Gleichung

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

gegeben.

3. Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + \cos 2x$. Sei t_a die Tangente an den Graphen von f im Punkte $(a, f(a))$. Stellen Sie einen „animierten Plot“ her, welcher die Graphen von f und t_a für $0 \leq a \leq 2\pi$ zeigt.

4. Sei $(a_k)_{k \geq 0}$ gegeben durch $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ und

$$a_{k+2} = (2k + 3)a_{k+1} + (k + 1)^2 a_k.$$

Die Folge (b_k) genüge derselben Rekursion, aber mit den Anfangswerten
$b_0 = 1, \quad b_1 = 1. \quad$ Sei $c_k = \dfrac{4a_k}{b_k}$.
Untersuchen Sie die Folge $(c_k)_{k \geq 0}$ auf Konvergenz: Erraten Sie dazu den Grenzwert c der Folge und finden Sie für $\varepsilon = 10^{-10}$ das kleinste k mit $|c_k - c| < \varepsilon$.