Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2004/05

Übungen zu Analysis mit Maple
Serie 8

1. Sei a_k der Umfang des regelmäßigen $2^k 3-$Ecks, welches den Einheitskreis als Inkreis hat, und sei b_k der Umfang des regelmäßigen $2^k 3-$Ecks, welches den Einheitskreis als Umkreis hat. Archimedes hat die Rekursionsformeln

$$a_{k+1} = \frac{2a_k b_k}{a_k + b_k}$$
$$b_{k+1} = \sqrt{a_{k+1}\, b_k} = \frac{\sqrt{2a_k}\, b_k}{\sqrt{a_k + b_k}}$$

gefunden, um die Zahl π abzuschätzen. Denn es gilt ja (!) $b_k < 2\pi < a_k$ und

$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 2\pi.$

Berechnen Sie a_k und b_k für $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Berechnen Sie insbesondere für $k = 5$ auch $|a_5 - \pi|$ und $|b_5 - \pi|$ numerisch. (Der Wert $k = 5$ entspricht dem von Archimedes betrachteten 96-Eck.)

Dieselben Rekursionsformeln gelten, wenn man statt des $2^k 3-$Ecks das $2^k m-$Eck mit $m \in \mathbb{N}$ betrachtet.

Untersuchen Sie auch den Fall $m = 2$.

2. Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$g(n) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{falls } n \equiv 0 (\text{mod} 3), \\[2ex] \frac{4n-1}{3}, & \text{falls } n \equiv 1 (\text{mod} 3), \\[2ex] \frac{4n+1}{3}, & \text{falls } n \equiv 2 (\text{mod} 3). \end{cases}$$

Sei wieder g^k die k-te Iterierte von g.
Untersuchen Sie, für welche $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ die Folge $(g^k(n))_{k\geq 0}$ periodisch ist.

3. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(1) = f(2) = 1$ und $f(n) = f(f(n-1)) + f(n - f(n-1))$ für $n \geq 3$.

Berechnen Sie $f(n)$ für $n \leq 100$. Finden Sie (numerisch) auch $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}$.

Plotten Sie auch die Punkte $(n, f(n))$ etwa für $100 \leq n \leq 10000$.