Übungen zu Analysis mit Maple
Serie 8

1. Die Folge $(a_k)_{k\geq 0}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 2$ und $a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + \frac{2}{a_k})$.
Berechnen Sie die ersten 6 Folgenglieder.
Finden Sie das kleinste k, für das $|a_k^2 - 2| < 10^{-50}$.

2. Sei a_n der Umfang des regelmäßigen n-Ecks, welches den Einheitskreis als Inkreis hat, und sei b_n der Umfang des regelmäßigen n-Ecks, welches den Einheitskreis als Umkreis hat. Archimedes hat die Rekursionsformeln
$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \\ b_{2n} &= \sqrt{a_{2n} b_n} \quad \left(= \frac{\sqrt{2a_n} b_n}{\sqrt{a_n + b_n}} \right) \end{aligned}$$
gefunden.
Berechnen Sie $c_k = a_{2^k 3}$ und $d_k = b_{2^k 3}$ für $k = 1, 2, 3, ...$.
Berechnen Sie insbesondere $c_5 = a_{96}$ und $d_5 = b_{96}$ auch numerisch. Diese Werte wurden von Archimedes benutzt, um π abzuschätzen. Es gilt ja (!) $b_n < 2\pi < a_n$ und
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 2\pi\ .$$

3. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 3n + 1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$
wie in der Vorlesung. Sei f^k die k-te Iterierte von f. Bestimmen Sie
$$M_n := \max_{k\in\mathbb{N}} f^k(n)$$
für $n = 1, 2, 3, ..., 30$. Bestimmen Sie auch alle $n \leq 1000$ für die
$$M_n > \max_{m<n} M_m$$
sowie die zugehörigen Werte M_n.

4. Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, & \text{falls } n \equiv 0 (\text{mod} 3), \\[2ex] \dfrac{4n-1}{3}, & \text{falls } n \equiv 1 (\text{mod} 3), \\[2ex] \dfrac{4n+1}{3}, & \text{falls } n \equiv 2 (\text{mod} 3). \end{cases}$$
Sei wieder g^k die k-te Iterierte von g.
Untersuchen Sie, für welche $n \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$ die Folge $(g^k(n))_{k\geq 0}$ periodisch ist.