Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2003/04

Übungen zu Analysis mit Maple
Serie 7

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem
$$y'(x) = (\sin x + \sin \pi x)e^{y(x)}, y(0) = c.$$
Plotten Sie die Lösung für $c = -1$.
Plotten Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung zusammen mit den Lösungen für $c = 0,\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{3}{2},\ -2$.

2. Die verallgemeinerte logistische Gleichung ist gegeben durch
$$y'(x) = a(x)y(x) - b(x)y(x)^2.$$
Berechnen Sie für $a(x) = 2 - \sin x$ und $b(x) = 2 + \cos x$ die Lösung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.
Plotten Sie auch das Richtungsfeld der Differentialgleichung zusammen mit dieser Lösung sowie den Lösungen zu anderen Anfangsbedingungen.

3. Das gedämpfte mathematische Pendel ist durch die Differentialgleichung
$$x''(t) + ax'(t) + b \sin x(t) = 0$$
gegeben.
Plotten Sie für $(a, b) = (\frac{1}{8}, 1)$ die Lösungen zu den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ sowie $x'(0) = 2$, $x'(0) = 2,2$ und $x'(0) = 2,3$.
Plotten Sie auch das Phasenportrait des zugehörigen Systems
$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -ay(t) - b \sin x(t) \end{aligned}$$
zusammen mit den Lösungskurven für obige Anfangsbedingungen.
Interpretieren Sie die Ergebnisse physikalisch.

4. Das Räuber-Beute-Modell von Lotka und Volterra ist durch die Differentialgleichungen
$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)(a - by(t)) \\ y'(t) &= y(t)(-c + dx(t)) \end{aligned}$$
gegeben. (Dabei ist $x(t)$ die Größe der Beutepopulation und $y(t)$ die Größe der Räuberpopulation zum Zeitpunkt t.)
Plotten Sie für $(a, b, c, d) = (3, 2, 2, 1)$ das Phasenportrait zusammen mit einigen Lösungskurven (etwa mit Anfangsbedingungen $x(0) = 2$ und $y(0) = \frac{1}{2}$) oder $y(0) = 1$.
Untersuchen Sie diese Differentialgleichungen auch für andere Werte von a, b, c, d.