Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2004

Analysis IV (für Physiker)
Serie 7

1. Seien $a, b, c, d, \in \mathbb{C},\ c \neq 0$, mit $ad - bc \neq 0$. Zeigen Sie, dass durch

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

eine bijektive, holomorphe Funktion $T : \mathbb{C}\backslash\{-d/c\} \to \mathbb{C}\backslash\{a/c\}$ gegeben ist und berechnen Sie die Umkehrfunktion T^{-1}.

Bemerkung: Funktionen T wie in Aufgabe 1 heißen Möbiustransformationen oder gebrochen lineare Transformationen. Setzt man $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\},\ T(-d/c) = \infty,\ T(\infty) = a/c$, so wird T zu einer bijektiven Abbildung von $\hat{\mathbb{C}}$ nach $\hat{\mathbb{C}}$.

2. Sei $a \in K(0, 1)$. Zeigen Sie, dass durch

$$T(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}$$

eine bijektive, holomorphe Funktion $T : K(0, 1) \to K(0, 1)$ gegeben ist.

3. Sei $a \in (0, 1)$ und sei $T : K(0, 1) \to K(0, 1)$ wie in Aufgabe 2. Sei

$$\varrho = \frac{a}{1 + a^2}.$$

Zeigen Sie, dass $T\left(\partial K(0, a)\right) = \partial K(\varrho, \varrho),\ T\left(K(0, a)\right) = K(\varrho, \varrho)$ und $T\left(K(0, 1)\backslash\overline{K}(0, a)\right) = K(o, 1)\backslash\overline{K}(\varrho, \varrho)$.

4. Sei $0 < \varrho < \frac{1}{2}$ und $\Omega = K(0, 1)\backslash\overline{K}(\varrho, \varrho)$. Lösen Sie das Dirichlet-Problem in Ω mit den Randwerten $u(z) = 0$ für $|z| = 1$ und $u(z) = 1$ für $|z - \varrho| = \varrho$. (Das heißt, finden Sie eine stetige Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, die in u harmonisch ist und die obigen Randwerte hat.) Berechnen Sie insbesondere $u(-1/2)$.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 und die Tatsache, dass für $0 < a < 1$

$$v(z) = \frac{\log|z|}{\log a}$$

harmonisch in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist und $v(z) = 1$ für $|z| = a$ sowie $v(z) = 0$ für $|z| = 1$ gilt.

Abgabe: Dienstag, den 01.06.04, in der Vorlesung