Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2004

Analysis IV (für Physiker)
Serie 6

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Wir sagen, dass u dem *Maximumprinzip* genügt, falls aus der Existenz eines Maximums von u folgt, dass u konstant ist. Mit anderen Worten: ein $z_0 \in \Omega$ mit $u(z_0) \geq u(z)$ für alle $z \in \Omega$ existiert nur dann, wenn $u(z) = u(z_0)$ für alle $z \in \Omega$.

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) Für jedes Gebiet $\Omega' \subset \Omega$ und für jede harmonische Funktion $v : \Omega' \to \mathbb{R}$ genügt $u - v$ dem Maximumprizip (auf Ω').

   (b) Ist $\overline{K}(z_0, r) \subset \Omega$, so gilt

   $$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt.$$

   Hinweis: Um zu zeigen, dass (b) aus (a) folgt, wähle man $\Omega' = K(z_0, r)$ und v als die harmonische Funktion, die auf $\partial K(z_0, r)$ mit u übereinstimmt.

   Bemerkung: Funktionen, die die in Aufgabe 1 genannten Bedingungen erfüllen, heißen *subharmonisch*.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Es gelte $\Delta u(z) > 0$ für alle $z \in \Omega$. Zeigen Sie, dass u subharmonisch ist.

   Bemerkung: Tatsächlich gilt für $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, dass u genau dann subharmonisch ist, wenn $\Delta u(z) \geq 0$ für alle $z \in \Omega$ gilt.

3. Sei f holomorph in Ω. Sei $\overline{K}(0, R) \subset \Omega$ und $z \in K(0, R)$. Zeigen Sie, dass

   $$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re } \left(f(Re^{it})\right) \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \, dt + i\text{Im } f(0)$$

   gilt. Folgern Sie hieraus, dass für $0 < r < R$

   $$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{R+r}{R-r} \max_{|z|=R} |\text{Re } f(z)| + |\text{Im } f(0)|$$

   gilt.

4. Sei (u_n) eine Folge harmonischer Funktionen $u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass auch u harmonisch ist.

Abgabe: Dienstag, den 25.05.04, in der Vorlesung