Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2004

Analysis IV (für Physiker)
Serie 5

1. Sei $a \geq 2$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f(z) = e^z + (z+a)^n$ eine Nullstelle in $K(-a, 1)$ hat.

2. Sei $f : K(0,1) \to K(0,1)$ holomorph. Es gelte $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $|f(z)| \leq |z|$ für $z \in K(0,1)$.

   Hinweis: Wenden Sie das Maximumprinzip auf $f(z)/z$ an.

   Bemerkung: Die Aussage von Aufgabe 2 ist als "Schwarzsches Lemma“ bekannt.

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $u \in C^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta u(re^{i\varphi}) = \frac{\partial^2 u(re^{i\varphi})}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(re^{i\varphi})}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(re^{i\varphi})}{\partial \varphi^2}.$$

4. Sei $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ und sei $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ harmonisch. Sei $I : (r_1, r_2) \to \mathbb{R}$,

$$I(r) = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta.$$

   Zeigen Sie, dass $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $I(r) = \alpha \log r + \beta$.

   Hinweis: Definieren Sie

$$J(r) = r \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\partial u(re^{i\theta})}{\partial r} d\theta$$

   und zeigen Sie unter Benutzung von Aufgabe 3, dass $J(r)$ konstant ist, etwa $J(r) = \alpha$. Folgern Sie hieraus, dass $I(r) - \alpha \log r$ konstant ist.

Abgabe: Dienstag, den 18.05.04, in der Vorlesung