Analysis IV (für Physiker)
Serie 4

1. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und seien $A, B, C \geq 0$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelte
$$|f(z)| \leq A + B|z|^C.$$
Zeigen Sie, dass f ein Polynom vom Grad $\leq C$ ist.

2. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Für alle $z \in \mathbb{C}$ sei
$$|f(z)| \leq e^{|z|}.$$
Sei
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$
die Potenzreihenentwicklung von f. Zeigen Sie, dass $|a_k| \leq \left(\frac{e}{k}\right)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

3. Sei $f : K(0,1) \to K(0,1)$ holomorph. Zeigen Sie, dass
$$|f'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$$
für alle $z \in K(0,1)$.

4. Untersuchen Sie, ob es holomorphe Funktionen $f, g : K(0,2) \to \mathbb{C}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$
$$f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$$
bzw.
$$g\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{1}{2n^2+1}$$
gilt.

Abgabe: Dienstag, den 11.05.04, in der Vorlesung