Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2004

Analysis IV (für Physiker)
Serie 3

1. Zeigen Sie, dass $\int\limits_0^\infty \cos(2t^2)dt = \int\limits_0^\infty \sin(2t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

   Anleitung:
   Definieren Sie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \exp(-z^2)$ und benutzen Sie den Cauchy-Integral-Satz, um einzusehen, dass für alle $R > 0$ gilt
   $$\int_{[0,R]} f(z)dz + \int_{[R,R+iR]} f(z)dz + \int_{[R+iR,0]} f(z)dz = 0.$$
   Zeigen Sie weiter, dass $\lim\limits_{R\to 0} \int\limits_{[R,R+iR]} f(z)dz = 0$ gilt und verwenden Sie die (in Analysis III bewiesene) Gleichung $\int\limits_0^\infty \exp(-t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgende Integrale:

   (1) $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}$,

   (2) $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)^3(z-1)}$,

   (3) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin(z)}{z+i} dz$.

3. Sei $\sum\limits_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ Potenzreihe vom Konvergenzradius r_0 und sei

   $f : K(z_0, r_0) \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum\limits_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$. Sei $z_1 \in K(z_0, r_0)$ und sei $f(z) = \sum\limits_{k=0}^\infty b_k(z-z_1)^k$ die Potenzreihenentwicklung von f um z_1. Zeigen Sie, dass für alle $k \geq 0$
   $$b_k = \sum_{n=k}^\infty a_n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (z_1 - z_0)^{n-k}$$
   gilt und dass für den Konvergenzradius r_1 der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^\infty b_k(z-z_1)^k$ die Abschätzung $r_1 \geq r_0 - |z_1 - z_0|$ gilt. Geben Sie ein Beispiel, für welches $r_1 > r_0 - |z_1 - z_0|$ gilt.

4. Seien $f, a_n, b_n, z_0, z_1, r_0, r_1$ wie in Aufgabe 3. Es gelte $z_0, z_1, a_n \in \mathbb{R}$, $z_1 > z_0$, und $a_n \geq 0$ für alle n.
   Zeigen Sie, dass dann $r_1 = r_0 - |z_1 - z_0|$ gilt.

   Hinweis: Benutzen Sie einen Satz aus Analysis I, welcher besagt, dass absolut konvergente Reihen umgeordnet werden können.

Abgabe: Dienstag, den 04.05.04, in der Vorlesung