

**Analysis IV (für Physiker)**  
**Serie 2**

1. Berechnen Sie  $\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z - \frac{1}{2}}$  für  $n \in \{1, 2, 3\}$  und

$$\gamma_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto -it,$$

$$\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \exp\left(\left(\frac{\pi}{2} + t\right)i\right),$$

$$\gamma_3 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \exp\left(\left(\frac{\pi}{2} - t\right)i\right)$$

**Bezeichnung.** Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  bezeichnen wir mit  $[z_1, z_2]$  die durch

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$$

gegebene Kurve.

2. Sei  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{it : t \leq 0\}$  und

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \int_{[i, z]} \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\pi}{2}i.$$

Zeigen Sie, dass  $F(z) = \text{Log } z$  falls  $\text{Re } z > 0$  oder  $\text{Im } z > 0$ .

**Zusatz:** Zeigen Sie, dass  $F(z) = \text{Log } z + 2\pi i$  falls  $\text{Re } z < 0$  und  $\text{Im } z < 0$ .

3. Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\sqrt[n]{z} := z^{1/n}$  der Hauptwert der Wurzel gemäß Vorlesung.

Für welche  $z$  gilt  $(\sqrt[n]{z})^n = z$ ?

Für welche  $z$  gilt  $\sqrt[n]{z^n} = z$ ?

4. Sei  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{it : |t| \geq 1\}$  und sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \int_{[0, z]} \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2}$ .

Sei  $S = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Re } z| < \frac{\pi}{2}\}$ . Zeigen Sie: Ist  $z \in S$ , so gilt  $\tan z \in \Omega$  und  $f(\tan z) = z$ .

**Abgabe:** Dienstag, den 27.04.04, in der Vorlesung