Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2004

Analysis IV (für Physiker)
Serie 12

1. Sei $V = C[a,b]$, versehen mit der Norm
$$||f||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$
für $f \in V$. Sei $A : V \to V,\ f \mapsto Af$ definiert durch
$$Af(x) = \int_a^x f(t)dt.$$
Zeigen Sie, das A beschränkt ist und berechnen Sie die Operatornorm $||A||$.

2. Sei $V = C[a,b]$, versehen mit dem Skalarprodukt
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$
und der zugehörigen Norm $||f||_2$. Sei $K : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $B : V \to V, f \mapsto Bf$, definiert durch
$$Bf(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy.$$
Zeigen Sie, dass B beschränkt ist und dass für die Operatornorm $||B||$ die Abschätzung
$$||B|| \le \left(\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$$
gilt.

Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

3. Bestimmen Sie eine Funktion $K : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$, so dass der in Aufgabe 2 definierte Operator B mit dem in Aufgabe 1 definierten Operator A übereinstimmt.
Schätzen Sie hiermit $||A||$ ab, wenn man in $V = C[a,b]$ die Norm $||f||_2$ zu Grunde legt.

Hinweis: Die in Aufgabe 3 gefundene Funktion K ist nicht stetig, aber die Abschätzung für $||B||$ aus Aufgabe 2 gilt auch für diese Funktion K.

4. Sei $T : l_2 \to l_2,\ (a_1, a_2, a_3, ...) \mapsto (a_2, a_3, a_4, ...)$. Bestimmen Sie den adjungierten Operator T^*.

Abgabe: Dienstag, den 13.07.04, in der Vorlesung