Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2004

Analysis IV (für Physiker)
Serie 10

1. Orthogonalisieren Sie die Polynome $1, x, x^2, x^3$ bezüglich des durch

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\, e^{-x} dx$$

gegebenen Skalarproduktes.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $Q_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. Zeigen Sie, dass die Q_n ein Orthogonalsystem bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx \quad \text{bilden.}$$

Bemerkung: Aus Aufgabe 2 folgt, dass $Q_n(x) = 2^n n! P_n(x)$ mit dem Legendre-Polynom $P_n(x)$ gilt. Diese Gleichung heißt auch *Rodriguessche Formel*.

3. Sei $f \in C^2[-1,1]$ und sei $g \in C[-1,1]$ definiert durch

$$g(x) = \frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}f(x)\right).$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$\int_{-1}^1 f(x)\, p(x)\, dx = 0$$

für jedes Polynom p vom Grad höchstens k. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\int_{-1}^1 g(x)\, p(x)\, dx = 0$$

für jedes Polynom p vom Grad höchstens k gilt.

4. Zeigen Sie, dass das Legendre-Polynom P_n vom Grad n der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\,\frac{d}{dx}\,P_n(x)\right) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

genügt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die linke Seite in obiger Differentialgleichung ein Polynom vom Grad höchstens $n-1$ ist und benutzen Sie Aufgabe 3.

Bemerkung: Die Differentialgleichung in Aufgabe 4 wird oft auch in der Form

$$(1-x^2)\, P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

geschrieben.

Abgabe: Dienstag, den 22.06.04, in der Vorlesung