Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2004

Analysis IV (für Physiker)
Serie 1

1. Sei $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{z + |z|}{\sqrt{2(|z| + \text{Re } z)}}$$

   Zeigen Sie (mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen), dass f holomorph ist und bestimmen Sie f'.
   Zeigen Sie außerdem, dass $f(z)^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

2. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ total differenzierbar.
   Sei $G = \{(r, \varphi) : r > 0,\ \varphi \in \mathbb{R},\ re^{i\varphi} \in \Omega\}$ und sei $F : G \to \mathbb{C}, \quad F(r, \varphi) = f(re^{i\varphi})$.
   Zeigen Sie, dass f genau dann holomorph ist, wenn

$$r \, \frac{\partial F}{\partial r} \, (r, \varphi) = -i \, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \, (r, \varphi)$$

   für alle $(r, \varphi) \in G$.

3. Sei $h : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ definiert durch $h(re^{i\varphi}) = \sqrt{r}\ e^{i\varphi/2}$.
   Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2, dass h holomorph ist.
   Zeigen Sie weiter, dass mit f wie in Aufgabe 1 $f = h$ gilt.

4. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, d.h. Ω ist offen und polygonzusammenhängend. Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph.
   Zeigen Sie: Ist Re f oder Im f konstant, so ist auch f konstant.

Abgabe: Dienstag, den 20.04.04