Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2014

Analysis IV
Serie 9

1. Entwickeln Sie die Funktion

$$f : \mathbb{C}\backslash\{-2,-1,2\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{4z - z^2}{(z^2-4)(z+1)}$$

im Kreisring $A(0,1,2) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ in eine Laurentreihe.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $f_1, f_2, f_3 : D(0,1)\backslash\{0\}$ definiert durch

$$f_1(z) = \frac{\sin z}{z^n}\ , \quad f_2(z) = \frac{1}{\tan^2 z} \quad f_3(z) = z^n \sin\left(\frac{1}{z}\right)\ .$$

Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten dieser Funktionen im Nullpunkt und geben Sie jeweils den Hauptteil der Laurententwicklung in $D(0,1)\backslash\{0\}$ an.

3. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $z_0 \in G$ und $f\colon G\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, also z_0 isolierte Singularität von f. Es sei $\operatorname{Re} f$ beschränkt in $G\backslash\{z_0\}$. Zeigen Sie, dass z_0 hebbare Singularität von f ist.

4. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet, S diskrete Teilmenge von G und $f\colon G\backslash S \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass f genau dann eine Stammfunktion hat, wenn $\operatorname{res}(f,s) = 0$ für alle $z \in S$.

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 24.06.2014, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.