Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2014

Analysis IV
Serie 8

1. (a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei weiter $0 \in \Omega$ und $R > 0$ mit $\overline{D(0,R)} \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass für alle $z \in D(0,R)$

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} \operatorname{Re} f(\zeta) \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} f(Re^{i\theta}) \operatorname{Re}\left(\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\right) d\theta$$

und

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} \operatorname{Re} f(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

gilt.

Hinweis. Benutzen Sie Aufgabe 1 der Serie 6.

(b) Sei f ganze Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq |\operatorname{Im} f(0)| + 3 \max_{|z|=2r} |\operatorname{Re} f(z)|.$$

(c) Sei f ganze Funktion. Es gebe Konstanten $A, B, C \geq 0$, so dass

$$|\operatorname{Re} f(z)| \leq A + B|z|^C$$

ist. Zeigen Sie, dass f ein Polynom ist, dessen Grad höchstens C ist.

Bemerkung. Die Behauptung gilt auch unter der schwächeren Voraussetzung, dass $\operatorname{Re} f(z) \leq A + B|z|^C$.

2. (a) Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ glatte Kurve. Zeigen Sie, dass differenzierbare Funktionen $\varrho, \varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ existieren, so dass $\gamma(t) = \varrho(t)e^{2\pi i\varphi(t)}$ für alle $t \in [0,1]$.

Hinweis. Hat γ die gewünschte Form, so gilt $\gamma'/\gamma = \varrho'/\varrho + i2\pi\varphi'$.

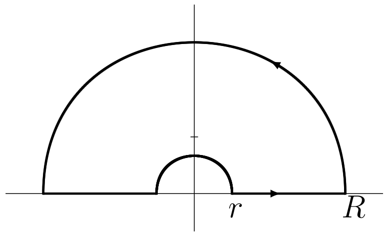
(b) Zeigen Sie, dass für jede geschlossene glatte Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein $m \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass γ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ homotop zu $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\sigma(t) = \gamma(0)e^{2\pi imt}$, ist. (Sie dürfen verwenden, dass Homotopie eine Äquivalenzrelation ist.)

(c) Folgern Sie aus (b), dass in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ nullhomologe glatte Kurven auch nullhomotop sind.

3. Berechnen Sie für $a, b > 0$ das Integral

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)} dx\ .$$

Hinweis. Benutzen Sie den skizzierten Integrationsweg, mit $r \to 0$ und $R \to \infty$.



4. Seien $G, H \subset \mathbb{C}$ Gebiete und sei $f\colon G \to H$ bijektiv und holomorph. Die Umkehrfunktion von f sei ebenfalls holomorph. Zeigen Sie, dass G genau dann einfach zusammenhängend ist, wenn H einfach zusammenhängend ist.

   Bemerkung. Wir werden später sehen, dass die Umkehrfunktion einer bijektiven, holomorphen Funktion immer holomorph ist.

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 17.06.2014, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.