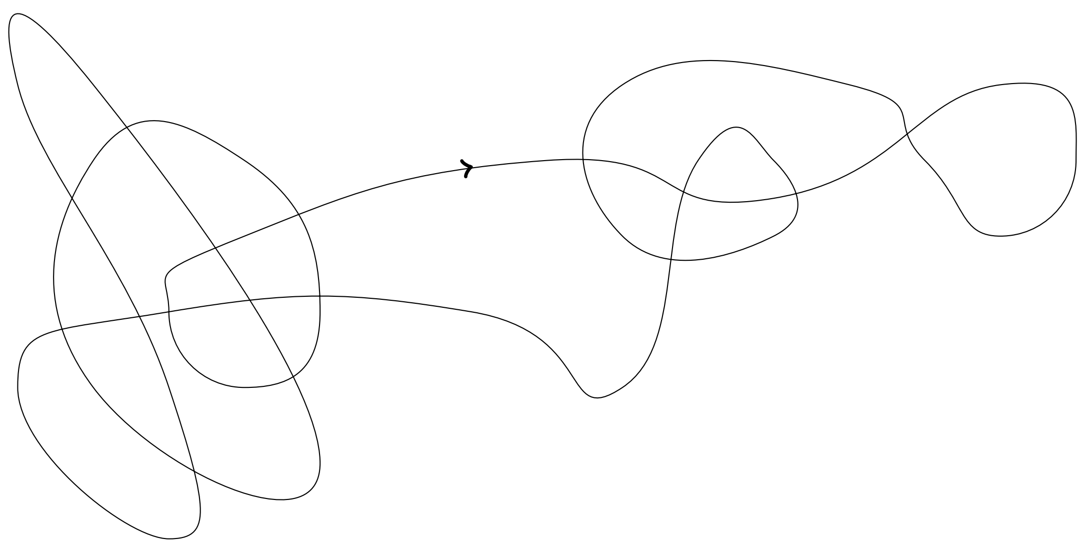
Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2014

Analysis IV
Serie 7

1. Sei $f\colon D(0,1) \to D(0,1)$ holomorph. Es gelte $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $|f(z)| \le |z|$ für alle $z \in D(0,1)$.

2. (a) Sei f eine ganze Funktion. Es gelte $|f(z)| \le e^{|z|}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass
$$|f^{(n)}(0)| \le n! \left(\frac{e}{n}\right)^n$$
für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
   (b) Sei $f\colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gelte
$$|f(z)| \le \frac{1}{1-|z|}$$
für alle $z \in D(0,1)$. Zeigen Sie, dass $|f'(0)| \le 4$.
   (c) Sei f wie in (b). Zeigen Sie, dass $|f^{(n)}(0)| \le e(n+1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

3. Sei γ der unten skizzierte Integrationsweg. Bestimmen Sie (ohne Beweis) für jede Komponente von $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Sp}(\gamma)$ die Windungszahl von γ um ein Element der entsprechenden Komponente und tragen Sie diese in die Grafik ein.



4. Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion einen Fixpunkt in
$$\{z \in \mathbb{C}\colon |\mathrm{Re}\ z| < 2,\ |\mathrm{Im}\ z| < \pi\}$$
hat.

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 03.06.2014, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.