Analysis IV
Serie 6

1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei weiter $0 \in \Omega$ und $R > 0$ mit $\overline{D(0,R)} \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass für alle $z \in D(0,R)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(Re^{i\theta}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta$$

gilt. Sei weiter $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass für $z \in D(0,R)$ auch

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(Re^{i\theta}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta$$

gilt.

Hinweis. Wenden Sie, für festes $z \in D(0,R)$, die Cauchy-Integralformel auf

$$g(w) = \frac{f(w)}{R^2 - \overline{z}w}$$

an.

2. Zeigen Sie, dass die Aussage des Cauchy-Integralsatzes für sternförmige Gebiete (Satz 5.2) allgemeiner auch für Gebiete G der Form $G = G_1 \cup G_2$ gilt, wenn G_1 und G_2 sternförmig sind und $G_1 \cap G_2$ zusammenhängend ist.

Mit anderen Worten: Ist G ein Gebiet dieser Form und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg in G.

3. Sei $\operatorname{Log}\colon \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ der in der Vorlesung definierte Hauptwert des Logarithmus. Für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ ist der Hauptwert z^α der Potenz durch

$$z^\alpha := \exp(\alpha \operatorname{Log} z)$$

definiert. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ schreibt man auch $\sqrt[n]{z}$ statt $z^{1/n}$. Bestimmen Sie die Menge der z, für die die folgenden Gleichungen gelten:

(a) $\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z$,

(b) $\sqrt[n]{z^n} = z$.

4. Sei $G \subset \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet und sei $f\colon G \to \mathbb{C}$. Es gelte $|f(z)| \to \infty$ gleichmäßig für $z \to \partial G$, d.h., für alle $M > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass $|f(z)| \geq M$, falls

$$\operatorname{dist}(z, \partial G) := \inf_{\zeta \in \partial G} |\zeta - z| < \delta \,.$$

Zeigen Sie, dass f nicht holomorph ist.

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 27.05.2014, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.