Analysis IV
Serie 5

1. Berechnen Sie unter Benutzung von $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ für $\lambda > 0$ das Integral
$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(\lambda x) dx \;.$$
Hinweis: Wenden Sie für reelles $R > 0$ den Cauchy-Integralsatz auf das Rechteck mit den Ecken $\pm R$, $\pm R + i\lambda/2$ an und betrachten Sie $R \to \infty$.

2. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, $n \in \mathbb{N}_0$ und $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ die Kurve mit $\gamma(t) = e^{-it}$. Weiterhin bezeichne $P_n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ das n-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Zeigen Sie, dass für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > 1$ gilt:
$$P_n(w) = \frac{w^{n+1}}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}(z-w)} dz \;.$$
Hinweis: Man schreibe den im Integranden auftretenden Faktor
$$\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w[1-(z/w)]}$$
und verwende dann die geometrische Reihe.

3. Beantworten Sie die folgenden zwei Fragen zur Funktionentheorie jeweils mit einer kurzen Begründung.
   (a) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f^{(n)}(0) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Welchen Wert besitzt das Kurvenintegral
   $$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-1|=R} \frac{f(z)}{z-1} dz$$
   für $R > 0$, wobei $|z-1| = R$ den positiv durchlaufenen Kreis um 1 mit Radius R bezeichnet?
   (b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
   $$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n-1}$$
   für alle $n \in \mathbb{N}$?

4. Sei G ein Gebiet mit $G \supset E := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$; f sei eine auf G holomorphe Funktion, die auf E durch $f(z) := \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ gegeben ist. Die Koeffizienten der Reihe seien alle nichtnegativ und der Konvergenzradius der Reihe sei 1. Zeigen Sie, dass $1 \notin G$.
Hinweis: Entwickeln Sie f um $1/2$ und untersuchen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe unter der Annahme, dass 1 ein regulärer Punkt von f sei.

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 20.05.2014, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.

Anmerkung. Die Aufgaben dieses Übungsblattes sind bayrischen Staatsexamensklausuren für das gymnasiale Lehramt entnommen.