Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2014

# Analysis IV
## Serie 4

1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sternförmiges Gebiet und sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ existiert, so dass $u = \operatorname{Re} f$.

2. Seien $\Omega$, $S$ und $f$ wie in Aufgabe 4 der Serie 3. Zeigen Sie, dass
$$\int_{\partial S} f(z)dz = 2i \int_S \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}\, d(x,y)\ .$$

3. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{C}\backslash(-\infty,0] \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1/z$, eine Stammfunktion hat und dass für jede Stammfunktion $F$ von $f$ eine Konstante $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ existiert, so dass $\exp F(z) = cz$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$.

4. Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale
$$\int_0^\infty \cos(t^2)dt \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \sin(t^2)dt\ ,$$
indem Sie für $R > 0$ die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \exp(-\frac{1}{2}z^2)$, über den Rand des Dreiecks mit den Ecken $0, R$ und $R + iR$ integrieren und dann den Grenzwert für $R \to \infty$ betrachten.

   Es wird vorausgesetzt, dass der Wert des Integrals $\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$ aus Analysis III (oder einer anderen Vorlesung) bekannt ist.

**Bemerkung.** In Aufgabe 3 und 4 dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist und $\exp' = \exp$ gilt.

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 13.05.2014, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.