Analysis IV
Serie 3

1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass f konstant ist, falls eine der folgenden Bedingungen gilt:

   (a) $\operatorname{Re} f$ ist konstant;

   (b) $\operatorname{Im} f$ ist konstant;

   (c) $|f|$ ist konstant.

2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\overline{\Omega} = \{z \in \mathbb{C}\colon \overline{z} \in \Omega\}$. Zeigen Sie, dass $g\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$, holomorph ist, mit $g'(z) = \overline{f'(\overline{z})}$.

   Zeigen Sie weiterhin, dass die Funktion $h\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, $h(z) = f(\overline{z})$, nur dann holomorph ist, wenn f konstant ist.

3. Sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$, und sei $f\colon \operatorname{Sp}(\gamma) \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq 4 \max_{z \in \operatorname{Sp}(\gamma)} |f(z)|.$$

   Bemerkung. Der Fall $\int_\gamma f(z)dz \geq 0$ ist etwas einfacher. Es kann sinnvoll sein, zunächst diesen zu betrachten.

4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei S eine kompakte Teilmenge von Ω, die für geeignete $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$ sowie Funktionen $\alpha, \beta \in C^1[a, b]$ und $\gamma, \delta \in C^1[c, d]$ sowohl in der Form

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

   wie auch in der Form

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon c \leq y \leq d,\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$$

   geschrieben werden kann. Sei $f = (u, v) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\partial S} \langle f(z), dz \rangle = \int_S \left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right) d(x, y)$$

   Dabei ist eine Parametrisierung von ∂S "entgegen dem Uhrzeigersinn" zu nehmen.

   Hinweis. Schreiben Sie $f = g + h$ mit $g = (u, 0)$ und $h = (0, v)$ und benutzen Sie die erste der angegebenen Formen von S um zu zeigen, dass

$$\int_{\partial S} \langle g(z), dz \rangle = -\int_S \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} d(x, y).$$

   Es reicht, die analoge Rechnung für h zu skizzieren.

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 06.05.2014, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.