Analysis IV
Serie 2

1. Wie lauten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten?

Definition: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Der *Laplace-Operator* $\Delta\colon C^2(\Omega,\mathbb{C}) \to C(\Omega,\mathbb{C})$ ist definiert durch

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}.$$

Eine Funktion $h \in C^2(\Omega,\mathbb{C})$ heißt *harmonisch*, wenn $\Delta h = 0$ gilt.

2. (a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $h \in C^2(\Omega,\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta h = 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial h}{\partial z} = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}.$$

   (b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in C^1(\Omega,\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

   (c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in C^2(\Omega,\mathbb{C})$. Weiter sei f holomorph. Zeigen Sie, dass f, $\bar{f}$, $\mathrm{Re} f$, und $\mathrm{Im} f$ harmonisch sind.

3. Beweisen Sie Satz 2.6 der Vorlesung.

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 29.04.2014, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.