Klausur zur Funktionentheorie I

Wintersemester 2003/04, PD Dr. Peter Müller
17. Februar 2004, 14:15–15:45 Uhr, großer Hörsaal

Aufgabe 1. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Man entscheide von den folgenden Aussagen, ob sie stets richtig sind. In jedem Fall begründe man die Antwort.

(a) Ist $G = \mathbb{C}$ und $f(z)$ beschränkt auf G, dann ist $f(z)$ konstant.

(b) Ist $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f(z)$ beschränkt auf G, dann ist $f(z)$ konstant.

(c) Ist $G = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\}$ und $f(z)$ beschränkt auf G, dann ist $f(z)$ konstant.

(d) Ist $G = \mathbb{C}$, und hat $f(z)$ keine Nullstellen in $\mathbb{C}$, dann ist $f(z)$ konstant.

Aufgabe 2. Sei Γ der in positiver Richtung durchlaufene Rand des Rechtecks mit den Ecken $\frac{1}{2} - 2i, \frac{1}{2} + 2i, -\frac{1}{2} + 2i, -\frac{1}{2} - 2i$. Berechne das Integral $\int_\Gamma \frac{dz}{z^4-1}$.

Aufgabe 3. Sei a eine wesentliche Singularität einer in einer punktierten Umgebung von a holomorphen Funktion. Man begründe, dass a auch eine wesentliche Singularität von $(f(z))^2$ ist.

Aufgabe 4. Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$.

Aufgabe 5. Man bestimme den Typ aller Singularitäten und alle Residuen von $\frac{1}{\sin z}$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 6. Sei $f(z)$ eine ganze Funktion mit $f(z) = f(2z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass $f(z)$ konstant ist.