Dr. K. Stadtmüller
H. Andela

Klausur
Elemente der Funktionentheorie

27.07.2009, 10.00 Uhr - 12.00 Uhr

Name:

Studienfach:

Fachsemester:

Matrikelnummer:

Ich bin damit einverstanden, dass mein Klausurergebnis unter Angabe der letzten vier Ziffern meiner Matrikelnummer (numerisch aufsteigend sortiert) ausgehängt und im Internet auf der Vorlesungsseite veröffentlicht wird.

Unterschrift:

Aufgabe		max. Punkte	erreicht	Korrekteur
1	a	5		
	b	5		
2	a	3		
	b	3		
3	a	4		
	b	3		
4	a	4		
	b	2		
	c	2		
5		5		
6		5		
7	a	3		
	b	2		
	c	4		
Gesamtpunktzahl		50		

Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 25 Punkte erreicht werden.

Fachnote	Prüfer

Aufgaben

Aufgabe 1 (5 + 5 Pkt.):

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar bzw. holomorph? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

(a) $f(x+iy) = e^x \cos y + i\, e^{-x} \sin y, \quad x, y \in \mathbb{R}$

(b) $f(z) = \begin{cases} \frac{e^z-1}{z} & \text{für} \quad z \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad z = 0 \end{cases}, \quad z \in \mathbb{C}.$

Aufgabe 2 (3 + 3 Pkt.):

Bestimmen Sie die Art der isolierten Singularität von f im Punkt $z_0 = 0$.
Bei einer hebbaren Singularität gebe man den Grenzwert von f in $z_0 = 0$, bei einem Pol oder einer wesentlichen Singularität den Hauptteil der Laurent-Reihe an.

(a) $f(z) = \dfrac{\cos(z) - 1}{z^5}$ (b) $f(z) = z^n \cdot e^{\frac{1}{z}} \quad (n \in \mathbb{N},\, n > 1)$

Aufgabe 3 (4 + 3 Pkt.):

Berechnen Sie den Wert der folgenden Wegintegrale

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2+4z}\, dz \qquad \gamma(t) = \pi \cdot \exp(it),\ t \in [0, 2\pi]$

(b) $\displaystyle\int_\gamma z^n \cdot e^{\frac{1}{z}}\, dz \quad (n \in \mathbb{N},\, n > 1) \qquad \gamma(t) = \exp(it),\ t \in [0, 2\pi]$

Aufgabe 4 (4 + 2 + 2 Pkt.):

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei in G und stetig auf ∂G.

(a) Zeigen Sie: Existiert eine Konstante $c \geq 0$ mit $|f(z)| = c$ für alle $z \in \partial G$, so ist f konstant in G.

(b) Warum kann auf die Nullstellenfreiheit für die Aussage in Teil (a) nicht verzichtet werden? Geben Sie hierzu ein Gegenbeispiel an.

(c) Warum ist die Aussage aus Teil (a) kein Widerspruch für das Beispiel

$$f(x+iy) = e^{ix} \quad \text{für das Gebiet} \quad G = \{z \in \mathbb{C} |\, |z| < 1\}?$$

bitte wenden ⟶

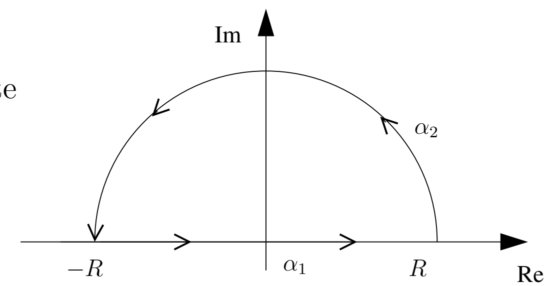
Aufgabe 5 (5 Pkt.):
Sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $\mathrm{Re}(f(z)) \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.
Zeigen Sie, dass dann f konstant ist.
(Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g(z) := e^{-f(z)}$.)

Aufgabe 6 (5 Pkt.):
Gibt es eine in $K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ holomorphe Funktion f mit

$$f(\tfrac{1}{n}) = \frac{\exp(i\frac{\pi}{2}n)}{n} \quad \text{für alle} \quad n = 1, 2, 3, \ldots ?$$

Aufgabe 7 ($3 + 2 + 4$ Pkt.):
Es sei $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ die in der Abbildung skizzierte Kurve mit $R > 1$ und

$$f(z) := \frac{e^{iz} - 1}{z}.$$



(a) Begründen Sie, warum $\int_\alpha f(z)\,dz = 0$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{\alpha_2} f(z)\,dz = -\pi i$.

(c) Man folgere aus Teil (a) und (b), dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \pi.$$

(Verwenden Sie: 1. $\lim\limits_{R\to\infty} \int_0^\pi e^{iRe^{it}}\,dt = 0$ 2. $\sin(x) = \frac{1}{2i}\,(\,e^{ix} - e^{-ix}\,)$.)

Erfolg besteht zu 50% aus Können, zu 50% aus Arbeit und zu 50% aus Glück. Viel Erfolg!