J. Müller / C. Tasto

SoSe2011
15.07.2011

1. Klausur zur Vorlesung Funktionentheorie

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen in $C^\infty(\mathbb{C}) = C^\infty(\mathbb{R}^2)$ bzw. $H(\mathbb{C})$ liegen:

(i) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$,

(ii) $f(z) = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Re}\,(iz)$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{1+z} \qquad (z \neq -1).$$

a) Zeigen Sie: f besitzt auf $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ eine Stammfunktion F mit $F(0) = 0$.

b) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von F mit Entwicklungsmitte $z_0 = 0$.

c) Überlegen Sie sich, dass $F(z) = \log(1+z)$ für $z \in G$ gilt.

d) Existiert eine Stammfunktion zu f in $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$?

e) Existiert eine Funktion $L \in H(\mathbb{C} \setminus \{-1\})$ mit $L(z) = \log(1+z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$?

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Zeigen Sie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{\nu \geq 1 \text{ ungerade}} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Arten der isolierten Singularitäten folgender Funktionen:

(i) $f(z) = \dfrac{\sinh(z)}{z} \qquad (z \neq 0)$,

(ii) $f(z) = \sinh(1/z) \qquad (z \neq 0)$,

(iii) $f(z) = \dfrac{1}{\sinh(z)} \qquad (z \neq k\pi i, k \in \mathbb{Z})$,

(iv) $f(z) = \dfrac{1}{\sinh^2(1/z)} \qquad \Big(z \neq \dfrac{1}{k\pi i}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, z \neq 0\Big)$.

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)

a) Berechnen Sie für $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} \, .$$

b) Es seien P und Q Polynome mit $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$. Zeigen Sie:

$$\sum_{w \in Z(Q)} \operatorname{Res}(P/Q,\, w) = 0 \, .$$

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zeigen Sie: Sind $f \in H(G)$ und $g \in C(G)$ mit $f \cdot g \equiv 0$ in G, so ist $f \equiv 0$ in G oder $g \equiv 0$ in G.