UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Klausur zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2012

Mittwoch, 1.8.2012, 9:00 – 12:00 Uhr

Willkommen zur Klausur der Vorlesung Funktionentheorie

- Die Klausur beginnt um 9:00 Uhr (*st*) und endet um 12:00 Uhr (*st*).
- Bitte tragen Sie Ihre persönlichen Daten auf diesem Blatt ein und **unterschreiben Sie** dieses.
- Für diese Klausur sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis zur Kontrolle auf den Tisch.
- Schreiben Sie bitte Ihre Lösungen auf die ausgegebenen Aufgabenblätter. Sollte Ihnen der Platz nicht reichen, benutzen Sie bitte die Rückseiten der Blätter und machen Sie kenntlich, um welche Aufgaben es sich jeweils handelt.
- Beschriften Sie bitte auch alle Schmierblätter mit Ihrem Namen und geben Sie diese mit ab.
- Bitte schreiben Sie weder in rot noch mit Bleistift.

Viel Erfolg!

Nachname: Vorname:

Geburtsdatum: Matrikelnummer:

Semesterzahl: Fachrichtung:

Unterschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Zus.*	Summe
Punkte										

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2=10 Punkte)**.** Im Folgenden werden einige Grundbegriffe der Vorlesung abgefragt.

(a) Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Wann nennen wir eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph?

(b) In welche Klassen lassen sich isolierte Singularitäten einteilen und wie werden diese unterschieden?

(c) Eine holomorphe Funktion f habe im Punkt a eine isolierte Singularität. Wie ist das Residuum $\mathrm{Res}(f; a)$ definiert?

(d) Seien γ_1 und γ_2 zwei geschlossene Kurven in einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Was verstehen wir unter einer Homotopie zwischen γ_1 und γ_2?

(e) Wie lautet die (funktionentheoretische) Definition des Begriffs "normale Familie"?

Aufgabe 2 (2+2+2+2+2=10 Punkte)**.** Formulieren Sie die folgenden Sätze der Vorlesung. Geben Sie dabei *alle* Voraussetzungen sowie die vollständige Aussage des Satzes an.

(a) Formulieren Sie den Satz von Liouville.

(b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und sei $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit holomorpher Restriktion $f|_G$. Welche Aussage macht das Maximumprinzip in dieser Situation?

(c) Was besagt der Satz von Rouché?

(d) Formulieren Sie den Riemannschen Hebbarkeitssatz.

(e) Wie lautet die Cauchysche Integralformel in der Fassung für konvexe offene Mengen?

Aufgabe 3 (2+2+2+2+2=10 Punkte)**.** Geben Sie bei den folgenden Aussagen jeweils an, ob sie wahr oder falsch sind. (Ohne Begründung!)
Für eine richtige Antwort bekommen Sie dabei 2 Punkte, für eine falsche 2 Minuspunkte, für gar keine Antwort 0 Punkte. Falls Sie bei dieser Aufgabe mehr Minuspunkte als Pluspunkte sammeln, wird die Aufgabe mit Null Punkten gewertet.
Lesen Sie die Aussagen sorgfältig!

(a) Die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto |z|$ ist holomorph.

(b) Es gibt keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|zf(z)| \leq 1$ mit $f(0) = 1$.

(c) Auf $D := \{z \in \mathbb{C} | \; |z - 1| < 1\}$ gibt es eine holomorphe Funktion, die einfache Nullstellen genau in den Punkten $\{1 - \frac{1}{2n} | \; n \in \mathbb{N}\}$ hat.

(d) Ist f eine ganze Funktion, für die auch $\overline{f}$ holomorph ist, so ist f konstant.

(e) Ist γ eine geschlossene Kurve in einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$, so gilt

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 0 \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{C}\backslash\Omega.$$

Aufgabe 4 (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Rechenschritte!

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2\overline{z} + \frac{1}{3}\overline{z}^3.$$

Berechnen Sie die Pompeiu-Wirtinger-Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ und bestimmen Sie alle Punkte, in denen f komplex differenzierbar ist.
Gibt es eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{C}$, so dass $f|_D$ holomorph ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Gegeben sei die Funktion

$$u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \; x + iy \mapsto x^3 - 3xy^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1.$$

Bestimmen Sie eine ganze Funktion f mit $\mathrm{Re}(f) = u$.

Aufgabe 5 (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Rechenschritte!

(a) Bestimmen Sie die Laurententwicklung der durch

$$f(z) := \frac{1}{z^2(z-1)}$$

definierten Funktion f auf

$$R_1 := \{z \in \mathbb{C} |\ 0 < |z| < 1\} \qquad \text{und} \qquad R_2 := \{z \in \mathbb{C} |\ |z| > 1\}.$$

(b) Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der durch die Vorschriften

$$g(z) := \frac{\exp(z^2) - 1}{z^2} \qquad \text{und} \qquad h(z) := \exp\Big(- \frac{1}{(z-2)^3}\Big)$$

gegebenen Funktionen g und h. Geben Sie ferner $\operatorname{Res}(g; 0)$ und $\operatorname{Res}(h; 2)$ an.

Aufgabe 6 (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Rechenschritte!

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{2}{i}\int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z^2+4z+1}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(x)}\,dx,$$

und bestimmen Sie damit den Wert des Integrals

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(x)}\,dx.$$

(b) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

Aufgabe 7 (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Rechenschritte!

Wir setzen $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}| \ |z| < 1\}$. Sei $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so dass $f|_{\mathbb{D}}$ holomorph ist und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$ gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) f hat eine Nullstelle oder f ist konstant.

(b) f hat nur endlich viele Nullstellen.

Aufgabe 8 (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Rechenschritte!

(a) Konstruieren Sie eine ganze Funktion f, die einfache Nullstellen genau in den Punkten aus $\{\sqrt[4]{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ besitzt.

(b) Wir setzen $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$. Es bezeichne $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, für die die Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad z \in \mathbb{D}$$

die Bedingung $|a_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine normale Familie ist.

Zusatzaufgabe* (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Rechenschritte!

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $A \subset G$ eine Teilmenge, die keinen Häufungspunkt in G hat. Weiter sei $f \in \mathcal{O}(G \backslash A)$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Besitzt f auf $G \backslash A$ eine komplexe Stammfunktion, so gilt

$$\operatorname{Res}(f; a) = 0 \qquad \text{für alle } a \in A.$$

(b) In (a) gilt auch die Umkehrung, d.h. ist

$$\mathrm{Res}(f; a) = 0 \qquad \text{für alle } a \in A$$

erfüllt, so hat f auf $G \backslash A$ eine komplexe Stammfunktion.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $G \backslash A$ wegzusammenhängend ist, d.h. dass zu je zwei Punkten $z_1, z_2 \in G \backslash A$ eine glatte Kurve $\gamma : [0, 1] \to G \backslash A$ mit $\gamma(0) = z_1$ und $\gamma(1) = z_2$ existiert.