MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. M. Kang
K. Bild/ C. Paleani

SS 2011
29.06.2011

Klausur in Funktionentheorie

Nachname: ________________________ Vorname: ________________________

Matrikelnummer: ________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Unterschrift Korrektor							

Hinweise:

- Füllen Sie bitte zuerst den Schein auf der letzten Seite der Klausur aus und anschließend die Erklärung auf der nächsten Seite.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben, wobei die letzte Aufgabe, also Aufgabe 6, eine Bonusaufgabe ist. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden. Die Summe der Punkte, inklusive der Bonusaufgabe, beträgt 120 Punkte. Erreichen Sie mithilfe der Bonusaufgabe mindestens 100 Punkte, so erhalten Sie volle Punktzahl, also 100 Punkte. Damit ist es insbesondere nicht möglich, die Klausur mit mehr als 100 Punkten bewertet zu bekommen. Beispielsweise, falls Sie 90 Punkte in den Aufgaben 1 bis 5 erhalten haben und 20 Punkte auf Aufgabe 6, so erhalten Sie insgesamt 100 Punkte und nicht 110. Andererseits, falls Sie nur 40 Punkte auf die Aufgaben 1 bis 5 bekommen haben und 20 Punkte auf Aufgabe 6, so erhalten Sie insgesamt 60 Punkte.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Schreiben Sie ihre Antworten, inlusive der Lösungswege, direkt auf den freien Platz unter der Aufgabe oder evtl. weiter auf der Rückseite. Bitte vermerken Sie dann, dass auf der Rückseite auch relevante Dinge stehen.

Einer Veröffentlichung der Note im Internet in der Form ‘Matrikelnummer - Note’ stimme ich

◯ zu ◯ nicht zu.

Unterschrift

Aufgabe 1: (15 Punkte)

Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $D \subset G$ eine in G diskrete Teilmenge, f holomorph auf $G \setminus D$. Man zeige: Die Funkiton f hat genau dann eine Stammfunktion auf $G \setminus D$ (G ohne D), wenn alle Residuen von f in G verschwinden.

Aufgabe 2: (30 Punkte)

Man berechne die folgenden Integrale (Dabei dürfen Sie natürlich Methoden und Ergebnisse der Vorlesung benutzen.)

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \qquad (10 Punkte)$$

b) $$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^3+x^2+x+1} dx \qquad (20 Punkte)$$

Aufgabe 2(Fortsetzung):

Aufgabe 3: (20 Punkte)

Gegeben sei eine ganze Funktion f mit $f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z)$, wobei $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \omega_1 \neq \lambda \omega_2$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 4: (20 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit

$$f(z) \ := \ \frac{1}{z^2(z-1)} .$$

Entwickeln Sie f in den Kreisringen $K_0(0,1)$ und $K_0(1,\infty)$ mit Zentrum 0 in eine Laurent-Reihe.

Welche Art von Singularität besitzt f im Nullpunkt? Begründen Sie ihre Antwort. (10 Punkte)

b) Geben Sie Art und Lage der Singularitäten der beiden Funktionen

$$g(z) \ := \ z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right) \qquad\qquad h(z) \ := \ \frac{\sin z}{2z}\,(z+1)$$

an. Geben Sie außerdem, falls möglich, zu jeder der beiden Funktionen eine holomorphe Fortsetzung an. Falls dies nicht möglich ist, begründen Sie es. (10 Punkte)

Aufgabe 4 (Fortsetzung):

Aufgabe 5: (20 Punkte)

a) Erklären Sie den Unterschied zwischen der Spur einer Kurve und einer Kurve. Abb.1 auf der nächsten Seite zeigt die Spur der Kurve γ, mit

$$\gamma(t) := 3\sin(4\pi t) + i\left(2\cos(6\pi t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi t)\right), \quad t \in [0,1].$$

Zeichnen Sie die Orientierung der Kurve in Abb.1 ein, bestimmen Sie die Umlaufzahlen in allen Bereichen und tragen Sie diese auch in die Abbildung ein. (10 Punkte)

Hinweis: Gehen Sie dabei davon aus, das die gezeigte Spur der Kurve von γ einfach durchlaufen wird.

b) Berechnen Sie (10 Punkte)

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4 - 1} dz$$

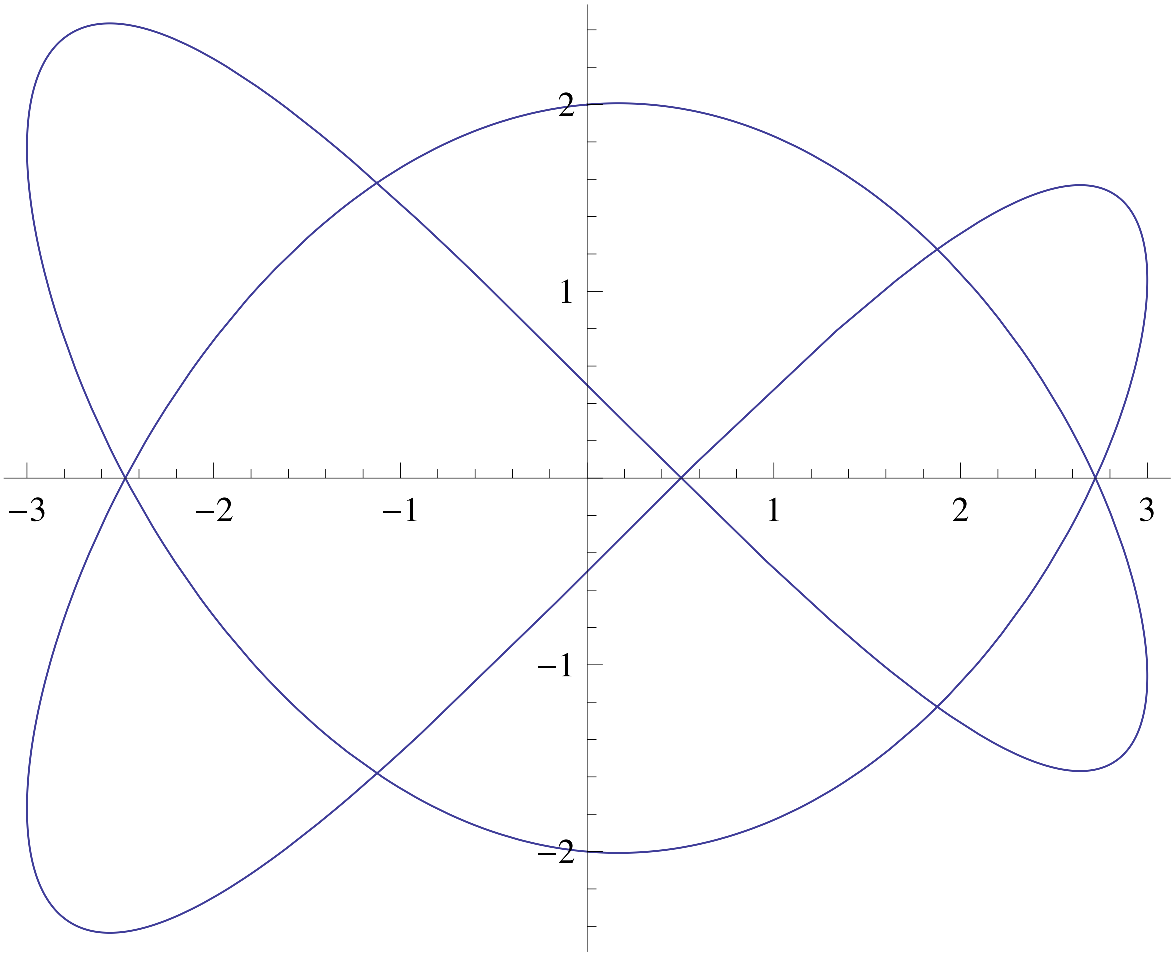

Abbildung 1

Aufgabe 6: (20 Punkte) Bestimmen Sie eine Biholomorphie $f : G_1 \to G_2$ zwischen den Gebieten

$$G_1 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \wedge \operatorname{Im} z > 0\} \quad \text{und}$$
$$G_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \wedge \operatorname{Im} z > 0 \wedge \operatorname{Re} z > 0\}\,.$$

Begründen Sie ihr Ergebnis ausführlich.

Dieser Leistungsnachweis entspricht auch den Anforderungen

nach §	Abs.	Nr.	Buchstabe	LPO I
nach §	Abs.	Nr.	Buchstabe	LPO I

UNIVERSITÄT MÜNCHEN

ZEUGNIS

Der / Die Studierende der ______________________________

Herr / Frau ______________________ aus ______________________

geboren am __________ in ______________ hat im __________ –Halbjahr __________

meine Seminar-Übungen ______________________________

____

mit ______________________________ besucht.

Er / Sie hat ______________________________

schriftliche Arbeiten geliefert, die mit ihm / ihr besprochen wurden. ______________

____

____

____

____

München, den ______________