Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Klausur Funktionentheorie

Aufgabe 1.
Skizzieren Sie die Teilmenge

$$M := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z^8) > 0\} \subset \mathbb{C}$$

in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$. Ist M in $\mathbb{C}$ offen? Ist M zusammenhängend? Begründen Sie kurz Ihre Antwort!
(1 Punkt für die Skizze, je 1/2 Punkt für die richtige Antwort, 1 Punkt für die Begründung)

Aufgabe 2.
Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\gamma_n} (z^2 + z^{-2})\,\mathrm{d}z$ für den geschlossenen Weg $\gamma_n(t) = \mathrm{e}^{int}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$ und $n \in \mathbb{Z}$.
(2 Punkte)

Aufgabe 3.
Geben Sie an, ob die folgenden drei Aussagen wahr oder falsch sind. Eine Begründung ist *nicht* verlangt. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für eine falsche Antwort keinen Punkt.

1. Das Bild des Einheitskreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ unter der Möbiustransformation $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} : z \mapsto \mathrm{i}\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$ ist die Menge $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
2. Die harmonische Funktion $f(z) := \log|z|$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ der Realteil einer holomorphen Funktion.
3. Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{1}{z}$ hat auf allen Zusammenhangskomponenten des Definitionsgebiets eine komplexe Stammfunktion.

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n^2+n}{3n^2+1}\right)^n z^n$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$, wobei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Reihe mit Konvergenzradius R sei.

(1+1 Punkte)

Aufgabe 5.

Sei $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $k > 0$. Wir betrachten das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xk}}{x^2 + m^2} \mathrm{d}x$$

über die reelle Achse.

1. Begründen Sie, warum das Integral einen endlichen Wert hat.
2. Zeigen Sie, dass die meromorphe Funktion

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}zk}}{z^2 + m^2}$$

   auf $\mathbb{C}$ die Pole $z = \pm \mathrm{i}m$ hat. Berechnen Sie die Polstellenordnung von f und das Residuum an beiden Polen.
3. Sei γ_R der Rand des Rechtecks in der komplexen Ebene mit Eckpunkten $-R$, R, $R + \mathrm{i}R$ und $-R + \mathrm{i}R$ mit $R > 0$. Berechnen Sie das Integral $\int_{\gamma_R} f(z) \mathrm{d}z$ im Limes $R \to \infty$ mit Hilfe des Residuensatzes.
4. Berechnen Sie nun den Beitrag der beiden vertikalen Kanten und der horizontalen Kante durch den Punkt $\mathrm{i}R$ zum Integral $\int_{\gamma_R} f(z) \mathrm{d}z$ im Limes $R \to \infty$. Folgern Sie daraus den Wert des oben angegebenen Integrals über die reelle Achse.

(1+2+1+2 Punkte)