Universität Duisburg-Essen/ Campus Essen 31.07.2004
FB 6 – Mathematik
Prof. Dr. D. Schmidt

1. Klausur zur FUNKTIONENTHEORIE (ANALYSIS IV)

1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\, z^{(n^2)}\,,$$

und untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe auf dem Rande des Konvergenzkreises. 3 P.

2. Gibt es eine holomorphe Funktion $f\,:\,\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$(\operatorname{Im} f)(z) = \exp(-2xy)\,\sin(x^2 - y^2)\,,\ \ (\,x = \operatorname{Re} z\,,\ y = \operatorname{Im} z\,)$$

und $f(0) = 0$? Bestimmen Sie diese gegebenenfalls. 3 P.

3. Berechnen Sie das Integral 3 P.

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{|\,z-i\,|=\sqrt{3}} \frac{\exp(\frac{\pi}{2}\,z)}{z^4 - 1}\,dz\,.$$

4. Berechnen Sie das Integral 3 P.

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\overline{0,1+i,2,1-i,0}} \frac{\ln(1+z)}{(z-1)^2}\,dz\,.$$

5. Geben Sie den regulären Teil und den Hauptteil der Funktion

$$f(z) = \frac{z(z-5)}{(z^2-9)(z-1)^2}$$

im Kreisring $R_{1,3} = \{\, z \in \mathbb{C} \,\big|\, 1 < |\,z\,| < 3 \,\}$ an, und bestimmen Sie die entsprechende Laurentreihe von f. 2+4 P.

6. Bestimmen Sie sämtliche isolierten Singularitäten der folgenden Funktion, geben Sie den Typ der jeweiligen Singularität an und bestimmen Sie die Residuen in den endlichen Singularitäten: 4 P.

$$f(z) \;=\; \frac{\exp(2\,\pi\,z) - 1}{z^2\,(z^2+1)\,(z^2+2)}\,.$$

7. Zeigen Sie, daß das Polynom

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + z + 1$$

in der Kreisscheibe $|\,z\,| < 1$ genau drei Nullstellen besitzt und die vierte Nullstelle im Kreisring $3 < |\,z\,| < 5$ liegt. 4 P.

8. Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, nicht konstant. Beweisen Sie, daß es eine Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ gibt mit $\operatorname{Re} f(z_n) \to +\infty, \quad (n \to \infty)$. 4 P.
Tipp: Betrachten Sie $g(z) := \exp(f(z))$.

9. Mit $-\infty < \tau_1 < \tau_2 < +\infty$ seien

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid \tau_1 < \operatorname{Im} z < \tau_2\} \text{ und } \Omega := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \exp(-\tau_2) < |\,\zeta\,| < \exp(-\tau_1)\}$$

bezeichnet. Es sei dann $f : S \to \mathbb{C}$ holomorph und 2π-periodisch

$$f(z + 2\,\pi) \;=\; f(z) \quad (z \in S)\,.$$

Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine holomorphe Funktion $F : \Omega \to \mathbb{C}$ mit **3 P.**

$$f(z) = F(\exp(i\,z)) \quad (z \in S).$$

(b) Es existiert eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit **2 P.**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \exp(i\,n\,z) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot \exp(i\,n\,z) \;+\; \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \cdot \exp(-i\,n\,z) \quad (z \in S).$$

Dabei ist die Konvergenz der Reihe(n) lokal-gleichmäßig auf S.

(c) Finden Sie eine Integraldarstellung für die Koeffizienten c_n $(n \in \mathbb{Z})$ aus (b). **2 P.**

Tipp zu (a): Definieren Sie F mit Hilfe des Hauptzweiges des Logarithmus.

10. Es seien $S \subset \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\,\}$ sowie $r > 0$ und $f \,:\, K_r(0) \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Jedes $a \in S$ sei ein Pol 1-ter Ordnung von f mit $\operatorname{Res}(f;a) =: \alpha_a$.
Zeigen Sie: Die Koeffizientenfolge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ der Taylorreihe von f um 0

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \quad (|z| < 1)$$

ist beschränkt, bzw. genauer: **6 P.**

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n| \;\leq\; \sum_{a\in S} |\alpha_a|\,.$$

Tipp: Betrachten Sie die entsprechenden Taylorreihen der Hauptteile f_a $(a \in S)$ und der Funktion $g := f \,-\, \sum\limits_{a\in S} f_a$ separat.

11. Bestimmen Sie $\max\{\,|z^2 - 2z + 2| \mid z \in \triangle(-1, i, -i)\}$. Wo wird das Maximum angenommen? **3 P.**

12. Es seien $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $S := \mathbb{Z} + \omega\,\mathbb{Z}$ und $f \,:\, \mathbb{C} \setminus S =: D_f \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\forall z \in D_f \;:\quad f(z+1) = f(z) = f(z+\omega).$$

Zeigen Sie , daß $\operatorname{Res}(f;a) = 0 \quad (a \in S)$ gilt. **4 P.**
Tipp: Wählen Sie eine geeignete Kurve, um das Residuum von f (z.B. in 0) auszurechnen.

13. Berechnen Sie das folgende reelle Integral mittels des Residuensatzes **3 P.**

$$\int_0^{2\,\pi} \frac{1}{2 - \sin(x)}\, dx\,.$$

14. Berechnen Sie das folgende reelle Integral mittels des Residuensatzes **4 P.**

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)}\, dx\,.$$