Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/09 26.2.2009

Klausur zur Analysis III (Funktionentheorie) für M, Ph

Bitte alle Blätter mit Namen und Matrikelnummer versehen und fortlaufend nummerieren.
Als Hilfsmittel sind alle schriftlichen Unterlagen zugelassen.
Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: __________

Vorname: __________

Matr.-Nr.: __________

Fachrichtung: __________

Aufgabe	1	2	3	4	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	15	10	15	8	48	
err. Punktzahl						

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Kennzeichnen Sie eine wahre Aussage mit „w“ bzw. eine falsche mit „f“. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsche Antwort einen Minuspunkt. Eine nicht beantwortete Aussage wird mit 0 Punkten bewertet. Das Gesamtergebnis dieser Aufgabe ist mindestens 0 Punkte. Die Antworten in dieser Aufgabe müssen nicht begründet werden.

(a) Es sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

- ☐ $f(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$.
- ☐ $f(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$ und $\lim_{|z|\to\infty} f(z)$ existiert.
- ☐ $f(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$ und $f(2) = 0$.
- ☐ $f(1/n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f(2) = 0$.
- ☐ $f(z) \in \{2 + \mathrm{i}y : y \in \mathbb{R}\}$ für alle $z \in \mathbb{D}$ und $f(2) = 0$.

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, γ ein Weg in U und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. In welcher der folgenden Situationen gilt dann immer $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 0$?

- ☐ U ist konvex und γ geschlossen.
- ☐ γ ist geschlossen.
- ☐ U ist einfach zusammenhängend.
- ☐ γ ist injektiv.
- ☐ γ ist geschlossen und f konstant.

(c) Wir verwenden im Folgenden den Hauptzweig des Logarithmus $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$.

- ☐ $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist weder injektiv noch surjektiv.
- ☐ $\log$ hat eine Stammfunktion auf $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$.
- ☐ $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist beschränkt.
- ☐ $\mathrm{i}^\mathrm{i} \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist periodisch.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}}\ \mathrm{d}z, \quad \text{mit } \gamma(t) = t + \mathrm{i}\log(t),\ t \in [\pi, 2\pi].$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z}\ \mathrm{d}z, \qquad \text{mit } \gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t \in [0, 2\pi].$

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Es sei

$$f(z) := \frac{z-3}{z^2(z+1)} \cdot \mathrm{e}^{1/(z-3)}.$$

(a) Bestimmen Sie alle insolierten Singularitäten dieser Funktion und geben Sie an, um welche Art von Singularitäten es sich jeweils handelt.

(b) Geben Sie in allen Polen die Nullstellenordnung sowie das jeweilige Residuum von f an.

(c) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$, wobei γ den einfach positiv durchlaufenen Rand des Kreises um 0 mit Radius 2 beschreibt.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, sowie $w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$.