Freie Universität Berlin
II. Mathematisches Institut
L. Wotzlaw

20. Juli 2007

Klausuraufgaben „Funktionentheorie I“

Name: ______________________________

Vorname: ___________________________

Immatrikulations-Nr.: ______________

Erklärung: Ich bin damit einverstanden, dass mein Klausurergebnis unter meiner Matrikelnummer ins Internet gestellt wird.

Berlin, den 20. Juli 2007 ________________________
Unterschrift

Hinweis: Sie können Ihre Lösung auf das Aufgabenblatt schreiben und bei Bedarf weitere Blätter anfügen. Aber bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben nicht auf dasselbe Blatt!

Aufgabe 1:

☐ **von 10 Punkten**

Seien f und g holomorphe Funktionen, definiert auf einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Ist z_0 Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ sowohl von f als auch von g, so ist z_0 eine hebbare Singularität von $\frac{f}{g}$ und es gilt:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)} \ .$$

Freie Universität Berlin
II. Mathematisches Institut
L. Wotzlaw

20. Juli 2007

Klausuraufgaben „Funktionentheorie I“

Name: ____________________________

Vorname: _________________________

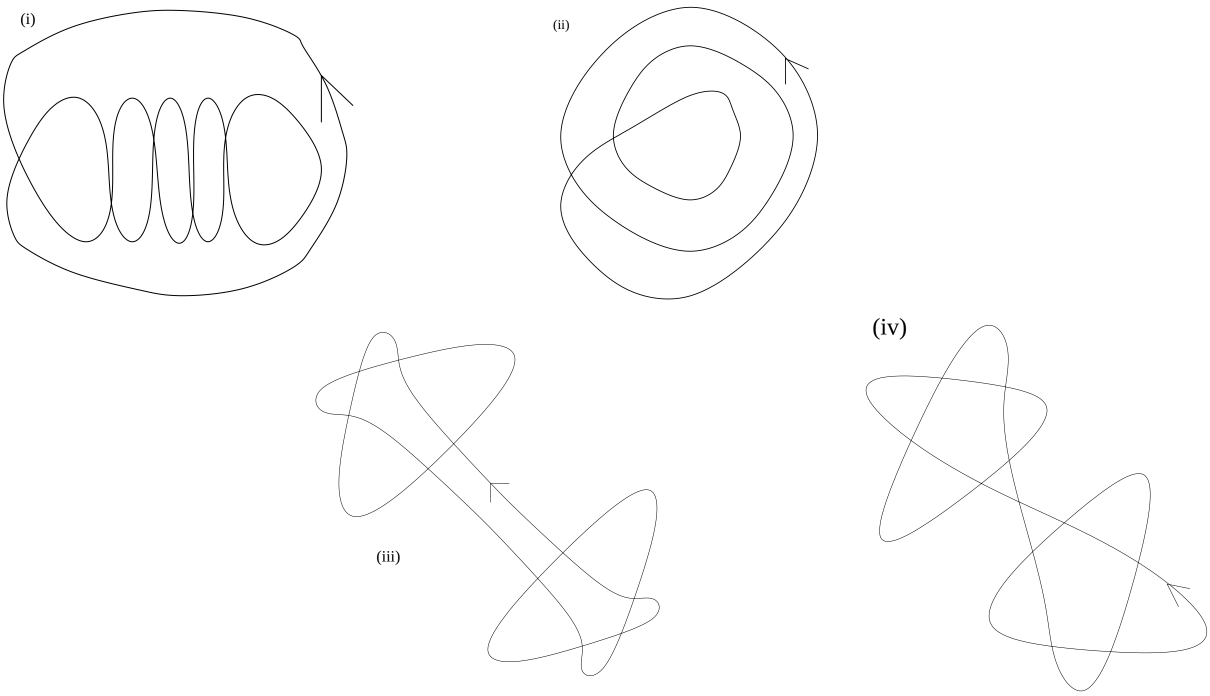
Immatrikulations-Nr.: _____________

Hinweis: Sie können Ihre Lösung auf das Aufgabenblatt schreiben und bei Bedarf weitere Blätter anfügen. Aber bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben nicht auf dasselbe Blatt!

Aufgabe 2:

☐ **von 8 Punkten**

Tragen Sie in jede innere Komponente des Komplementes der Wege $(i) - (iv)$ die Umlaufzahlen der jeweiligen Wege ein und geben Sie die Regel an, nach der Sie zu ihrer Berechnung verfahren sind (ohne Begründung).



Freie Universität Berlin
II. Mathematisches Institut
L. Wotzlaw

20. Juli 2007

Klausuraufgaben „Funktionentheorie I“

Name: ______________________________

Vorname: ___________________________

Immatrikulations-Nr.: _______________

Hinweis: Sie können Ihre Lösung auf das Aufgabenblatt schreiben und bei Bedarf weitere Blätter anfügen. Aber bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben nicht auf dasselbe Blatt!

Aufgabe 3:

☐ **von 10 Punkten**

i) Formulieren Sie den Satz von Liouville.

ii) Zeigen Sie die folgende Behauptung: Ist g eine nicht konstante, ganze Funktion, dann gibt es zu jedem $a \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$, so dass $g(z_k)$ für $k \to \infty$ gegen a konvergiert.

Freie Universität Berlin
II. Mathematisches Institut
L. Wotzlaw

20. Juli 2007

Klausuraufgaben „Funktionentheorie I“

Name: ______________________________

Vorname: ___________________________

Immatrikulations-Nr.: ______________

Hinweis: Sie können Ihre Lösung auf das Aufgabenblatt schreiben und bei Bedarf weitere Blätter anfügen. Aber bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben nicht auf dasselbe Blatt!

Aufgabe 4:

$\boxed{}$ **von 12 Punkten**

i) Zeigen Sie: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$, so definiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Funktionenfolge auf $\mathbb{C} - D_{1/\rho}(0)$.

ii) Begründen Sie auf zwei verschiedene Weisen, dass die Grenzfunktion holomorph auf $\mathbb{C} - D_{1/\rho}(0)$ ist.

iii) Folgern Sie (“$\rho \to +\infty$”): Ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ganz, so ist die Laurententwicklung um 0 (dh. in jedem Kreisring um Null) von $f(1/z)$ gerade $\sum_{n=-\infty}^{0} a_{-n} z^n$.

iv) Beweisen Sie folgende Anwendung: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ biholomorph, so ist $f(z) = a_0 + a_1 z$ mit $a_1 \neq 0$. Hinweis: Kann $f(1/z)$ eine wesentliche Singularität haben?

Freie Universität Berlin
II. Mathematisches Institut
L. Wotzlaw

20. Juli 2007

Klausuraufgaben „Funktionentheorie I“

Name: ____________________________

Vorname: __________________________

Immatrikulations-Nr.: ______________

Hinweis: Sie können Ihre Lösung auf das Aufgabenblatt schreiben und bei Bedarf weitere Blätter anfügen. Aber bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben nicht auf dasselbe Blatt!

Aufgabe 5:

$\square$ **von 12 Punkten**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^6}\mathrm{d}x \qquad \text{(Hinweis: } \zeta^6+1=0 \implies \zeta^5=-1/\zeta.\text{)}$$

$$\int_{S_1(0)} \overline{z}\mathrm{d}z$$

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\mathrm{d}t$$

Freie Universität Berlin
II. Mathematisches Institut
L. Wotzlaw

20. Juli 2007

Klausuraufgaben „Funktionentheorie I“

Name: ____________________________

Vorname: _________________________

Immatrikulations-Nr.: ______________

Hinweis: Sie können Ihre Lösung auf das Aufgabenblatt schreiben und bei Bedarf weitere Blätter anfügen. Aber bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben nicht auf dasselbe Blatt!

Aufgabe 6:

☐ **von 12 Punkten**

Entscheiden Sie (mit kurzer Begründung), welche der folgenden Aussagen richtig, welche falsch sind.

Jede richtige Antwort wird mit $+1$ Punkten, jede richtige Begründung mit weiteren $+1$ Punkten und jede falsche Antwort mit -1 Punkten bewertet. Für diese Aufgabe gibt es jedoch mindestens 0 Punkte.

i) Ist f in einem Gebiet holomorph, dann hat f dort eine Stammfunktion.

ii) Ist f holomorph auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, dann ist $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ holomorph auf $\overline{z}(U)$.

iii) Ist f eine ganze Funktion, die auf der reellen Achse beschränkt ist, dann ist f konstant.

iv) Es gibt eine ganze Funktion, für die $f(z) = 1$ für $|z| = 1$ und $f(2) = 2$ gilt.

v) $f(x, y) := x^2 + y^2$ ist komplex differenzierbar in allen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

vi) Eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^2$, die auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ reell differenzierbar und in einem $z_0 \in U$ komplex differenzierbar ist, lässt sich in einer ggf. kleineren Umgebung von z_0 in eine Potenzreihe entwickeln.

Viel Erfolg!