

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

**Klausur zur Vorlesung „Analysis IV“
im Studiengang 1-Fach-Bachelor / 2-Fach-Master Mathematik
22. Oktober 2014, 9:00 - 11:40 Uhr**

Für die Bearbeitung der folgenden 8 Aufgaben werden bei vollständig richtiger Bearbeitung jeweils 10 Punkte vergeben. Wer insgesamt 32 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Namen zu versehen. Bearbeitungszeit: 2 Stunden und 40 Minuten. Viel Erfolg! 😊

1. Wie lautet

(a) das Maximumprinzip? (3 Punkte)

(b) der Satz von Casorati-Weierstraß? (3 Punkte)

(c) der Riemannsche Abbildungssatz? (4 Punkte)

Weiter auf Seite 2

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

2. Sei $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x + iy) = x^3y - xy^3$. Zeigen Sie, dass u harmonisch ist und bestimmen Sie eine harmonische Funktion $v: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $f = u + iv$ holomorph ist.

Weiter auf Seite 3

3. Sei Log der in der Vorlesung definierte Hauptzweig des Logarithmus.

(a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ sind $\text{Log}(z)$ und $\text{Log}(z^2)$ beide definiert?

(b) Für welche z aus (a) gilt

$$\text{Log}(z^2) = 2\text{Log}(z)?$$

(c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\text{Log}(z^2)$ und $2\text{Log}(z)$ für die z aus (a), für die die Gleichung in (b) nicht gilt?

Weiter auf Seite 4

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

4. Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f , für die $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Weiter auf Seite 5

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

5. Seien $f, g: D(0, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Die Funktion f habe eine wesentliche Singularität in 0 und die Funktion $f \cdot g$ habe dort einen Pol.
Zeigen Sie, dass g eine wesentliche Singularität in 0 hat.

Weiter auf Seite 6

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

6. Berechnen Sie

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1/3}}{(1+x)^3} dx.$$

Weiter auf Seite 7

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

7. Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung der Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{-2, -1, 1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{6}{(z^2 - 1)(z + 2)},$$

im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Weiter auf Seite 8

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

8. Seien f und g ganze Funktionen. Es gelte $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Zeigen Sie, dass $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| \leq 1$ existiert, so dass $f(z) = cg(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____