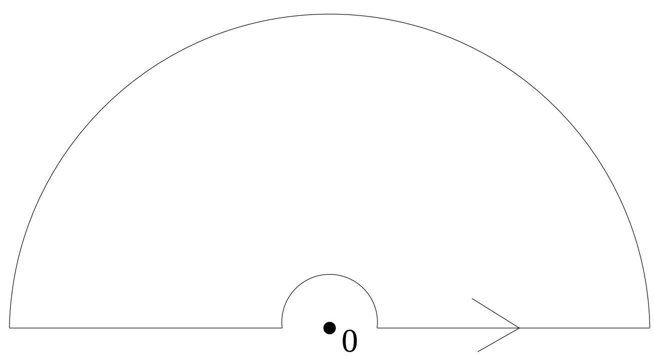
Analysis IV
Serie 12

1. Entwickeln Sie die Funktion
$$f : \mathbb{C}\backslash\{-2,-1,2\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{4z - z^2}{(z^2-4)(z+1)}$$
in den Kreisringen $A(0,1,2) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ und $A(0,2,\infty) = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < \infty\}$ in eine Laurentreihe.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $f_1, f_2, f_3 : D(0,1)\backslash\{0\}$ definiert durch
$$f_1(z) = \frac{\sin z}{z^n}\ , \quad f_2(z) = \frac{1}{\tan^2 z} \quad f_3(z) = z^n \sin\left(\frac{1}{z}\right)\ .$$
Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten dieser Funktionen im Nullpunkt und geben Sie jeweils den Hauptteil der Laurententwicklung in $D(0,1)\backslash\{0\}$ an.

3. Berechnen Sie für $a, b > 0$ das Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\, dx\ ,$$
indem Sie
$$\int_\gamma \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}\, dz$$
mit der unten skizzierten Kurve γ berechnen.



4. Seien G, H Gebiete und $f : G \to H$ biholomorph. Seien $z_0 \in G$ und $r > 0$ mit $\overline{D(z_0, r)} \subset G$. Seien $w_0 = f(z_0)$ und
$$\delta = \min_{|z-z_0|=r} |f(z) - w_0|\ .$$
Zeigen Sie, dass für $w \in D(w_0, \delta)$
$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - w_0|=r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}\, d\zeta$$
gilt.

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 13.07.2010, vor der Vorlesung abzugeben.