Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2010

Analysis IV
Serie 10

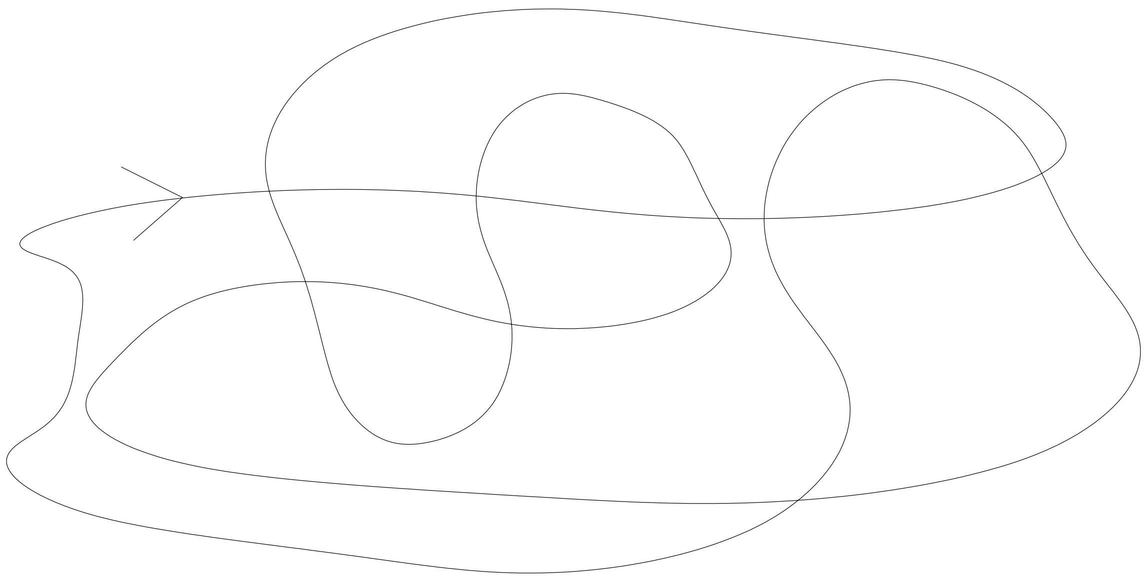
1. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet und es seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to G$ geschlossene Integrationswege, d.h., stückweise glatte, geschlossene Kurven. Sei $H : [0,1]^2 \to G$ eine stetige Funktion mit folgenden Eigenschaften:

   (a) $H(t,0) = \gamma_0(t)$ für alle $t \in [0,1]$,
   (b) $H(t,1) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [0,1]$,
   (c) $H(0,s) = H(1,s)$ für alle $s \in [0,1]$.
   (d) Die Kurve $\gamma_s : [0,1] \to G, \quad \gamma_s(t) = H(t,s)$ ist für alle $s \in (0,1)$ stückweise glatt.

   Zeigen Sie, dass die Kurven γ_0 und γ_1 homolog in G sind.

   Zusatz. Zeigen Sie, dass auf die Voraussetzung (d) verzichtet werden kann.

2. Sei γ der unten skizzierte Integrationsweg. Geben Sie (ohne Beweis) für jede Zusammenhangskomponente Z des Komplements der Spur von γ die Windungszahl von γ um ein Element von Z an.



3. Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $g : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G sei
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)dz \in \mathbb{Z} \,.$$
   Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ existiert, so dass
$$g = \frac{f'}{f} \,.$$

4. Sei $f : D(0,1) \to D(0,1)$ holomorph. Es gelte $f(0) = 0$.

   Zeigen Sie, dass $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D(0,1)$.

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 29.06.2010, vor der Vorlesung abzugeben.