Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2010

Analysis IV
Serie 9

1. Sei $R > 0$ und sei f holomorph in $D(0,R)$ mit der Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \ .$$

Zeigen Sie, dass für $0 < r < R$

$$2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

gilt.

2. Sei $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \exp\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \ .$$

Zeigen Sie, dass f unbeschränkt ist und dass $\lim_{z\to\zeta} |f(z)| = 1$ für alle $\zeta \in \partial D(0,1)\backslash\{1\}$ gilt.

3. Sei $G \subset \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet und sei $f : G \to \mathbb{C}$. Es gelte $|f(z)| \to \infty$ gleichmäßig für $z \to \partial G$, d. h. für alle $M > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass $|f(z)| \geq M$, falls

$$\text{dist}\ (z, \partial G) := \inf_{\zeta\in\partial G} |\zeta - z| < \delta \ .$$

Zeigen Sie, dass f nicht holomorph ist.

4. Sei $f : \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \geq 0\} \to \mathbb{C}$ stetig. Sei weiter f holomorph in $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\}$ und es gebe $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(iy)| \leq M$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Des weiteren gebe es $K \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in (0,1)$ mit $|f(z)| \leq K \exp(|z|^\alpha)$ für Re $z > 0$. Zeigen Sie, dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit Re $z > 0$.

Hinweis. Betrachten Sie für $\varepsilon > 0$ und $\beta \in (\alpha, 1)$ die Funktion

$$g(z) = f(z) \exp(-\varepsilon z^\beta).$$

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 22.06.2010, vor der Vorlesung abzugeben.