Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2010

Analysis IV
Serie 8

1. Zeigen Sie, dass es keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n-1}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

2. Sei I Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass für jedes $x_0 \in I$ eine Potenzreihenentwicklung
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_0)(x - x_0)^k$$
mit positivem Konvergenzradius $r(x_0)$ existiert.

   Zeigen Sie, dass ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $I \subset G$ und eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F\big|_I = f$ existiert.

3. Sei $\text{Log} : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ der Hauptwert des Logarithmus.

   Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ und $w > 0$ die Funktionalgleichung
$$\text{Log}\,(zw) = \text{Log}\,(z) + \text{Log}\,(w)$$
gilt.
Zeigen Sie weiterhin, dass dies im Allgemeinen nicht für $z, w \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ gilt.
Warum widerspricht Letzteres nicht dem Identitätssatz?

4. Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\overline{G} = \{\overline{z} : z \in G\}$ und sei $g : \overline{G} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Zeigen Sie, dass g holomorph ist.

   Sei weiter H ein Gebiet, welches symmetrisch bezüglich der reellen Achse ist, und sei $h : H \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gelte $h(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in H \cap \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $h(z) = \overline{h(\overline{z})}$ für alle $z \in H$.

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 15.06.2010, vor der Vorlesung abzugeben.