Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2010

Analysis IV
Serie 5

1. Sei
$$A(x) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{x^2} \\ -2 & \dfrac{3}{x} \end{pmatrix} ,$$
vgl. Serie 4, Aufgabe 2. Sei
$$b(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} .$$
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems
$$y'(x) = A(x)y(x) + b(x), \quad y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$
Hinweis. Die Standardfundamentalmatrix ist
$$\begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2x-2x^2 & 2x^2-x \end{pmatrix} .$$

2. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem
$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \frac{2x}{1-x^2}\, y_1(x) - \frac{2}{1-x^2}\, y_2(x) , \\ y_2'(x) &= y_1(x) \end{aligned}$$
auf dem Intervall $(-1,1)$.
Zeigen Sie, dass $y(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ Lösung ist.
Bestimmen Sie mit Hilfe des d'Alembertschen Reduktionsverfahrens eine zweite, von obiger Lösung linear unabhängige, Lösung. Geben Sie die Lösung mit dem Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ an.

3. Seien I Intervall und $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ stetig. Die Lösungen der Differentialgleichung
$$y'(x) = a(x) + b(x)y(x) + c(x)y(x)^2$$
können im Allgemeinen nicht in geschlossener Form angegeben werden. Zeigen Sie, dass sich dies ändert, wenn eine Lösung der Differentialgleichung bekannt ist.
Genauer: Sei $x_0 \in I$ und sei $\tilde{y}$ eine in einer Umgebung von x_0 existierende Lösung der obigen Differentialgleichung. Geben Sie ein Verfahren an, mit dem für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ berechnet werden kann.
Hinweis. Es gibt mehrere Lösungsmethoden.
Methode 1. Betrachten Sie $z(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$.
Methode 2. Setzen Sie $y = \dfrac{u}{v}$ und betrachten Sie ein geeignetes lineares System für u und v.

4. Seien A, B komplexe $(n \times n)$-Matrizen. Es gelte $AB = BA$. Zeigen Sie, dass $e^{A+B} = e^A e^B$ gilt. Zeigen Sie weiter durch ein Beispiel, dass dies ohne die Voraussetzung $AB = BA$ im Allgemeinen nicht gilt.

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 18.05.2010, vor der Vorlesung abzugeben.