Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2010

Analysis IV
Serie 4

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \sin(y(x) + x^n), \;\; y(0) = 0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat.

Können Sie für $n = 1$ die Lösung angeben?

Hinweis. Zeigen Sie, dass $\delta > 0$ existiert, so dass für $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \sin(y(x) + x^n), \;\; y(x_1) = y_1$$

eine eindeutig bestimmte Lösung auf $[x_1 - \delta, x_1 + \delta]$ hat.

2. Gegeben sei auf dem Intervall $(0, \infty)$ das lineare Differentialgleichungssystem $y'(x) = A(x)y(x)$ mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{x^2} \\ -2 & \dfrac{3}{x} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 2x^2 \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix des Systems ist und bestimmen Sie die Standardfundamentalmatrix bezüglich des Punktes $x_0 = 1$.

3. Seien I Intervall und $P, Q : I \to \mathbb{R}$ stetig. Seien y_1 und y_2 linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$$

auf I. Zeigen Sie, dass y_1 und y_2 keine gemeinsamen Nullstellen haben.

Zeigen Sie weiter, dass die Nullstellen einer nichttrivialen Lösung der obigen Differentialgleichung eine diskrete Teilmenge von I bilden. (Eine Teilmenge eines metrischen Raums X heißt diskret, wenn sie keinen Häufungspunkt in X hat.)

4. Seien I, P, Q, y_1 und y_2 wie in Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass zwischen zwei Nullstellen von y_1 immer eine Nullstelle von y_2 liegt.

Hinweis. Betrachten Sie das Vorzeichen der Wronski-Determinante an den Nullstellen.

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 11.05.2010, vor der Vorlesung abzugeben.