Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2010

Analysis IV
Serie 3

1. Sei I Intervall, $\alpha, \beta, g : I \to [0, \infty)$ stetig und $x_0 \in I$. Es gelte
$$g(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(t) g(t) dt$$
für $x \in I$, $x > x_0$. Zeigen Sie, dass
$$g(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \alpha(t)\beta(t) \exp\left(\int_{t}^{x} \beta(s) ds\right) dt$$
für $x \in I$, $x > x_0$.

2. Sei I Intervall, $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung
$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = b(x)$$
äquivalent zu einem linearen Differentialgleichungssystem ist, indem Sie so ein Differentialgleichungssystem explizit angeben.

3. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung
$$x y''(x) + y'(x) + x y(x) = 0$$
eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt, indem Sie einen Potenzreihenansatz
$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$
machen.

Warum folgt dies nicht aus Satz 1.3.1?

4. Sei $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} 0 & x = 0,\ y \in \mathbb{R} \\ 2x & 0 < x \leq 1,\ y < 0 \\ 2x - \dfrac{4y}{x} & 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2 \\ -2x & 0 < x \leq 1,\ y > x^2. \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass f stetig ist und dass für das Anfangswertproblem
$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(0) = 0$$
die Picard-Lindelöfsche Folge $(y_n(x))$ – definiert wie in Serie 1, Aufgabe 3, bzw. der Vorlesung – die Form $y_{2m-1}(x) = x^2$, $y_{2m}(x) = -x^2$, $m \in \mathbb{N}$, hat.

Können Sie eine Lösung des Anfangswertproblems angeben?

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 04.05.2010, vor der Vorlesung abzugeben.